Symmetry in Physics

Kihyeon Cho

Syllabus

- Introduction (Chap. 1)
- Special Relativity (Chap. 2)
  - Special Relativity
  - Symmetry (Group)
- Quantum Mechanics (Chap. 3)
- Detector
- Data Processing
- Feynman diagram (Chap. 4)
- QED (Chap. 5)
- QCD (Chap. 6)
- Weak interaction (Chap. 7)

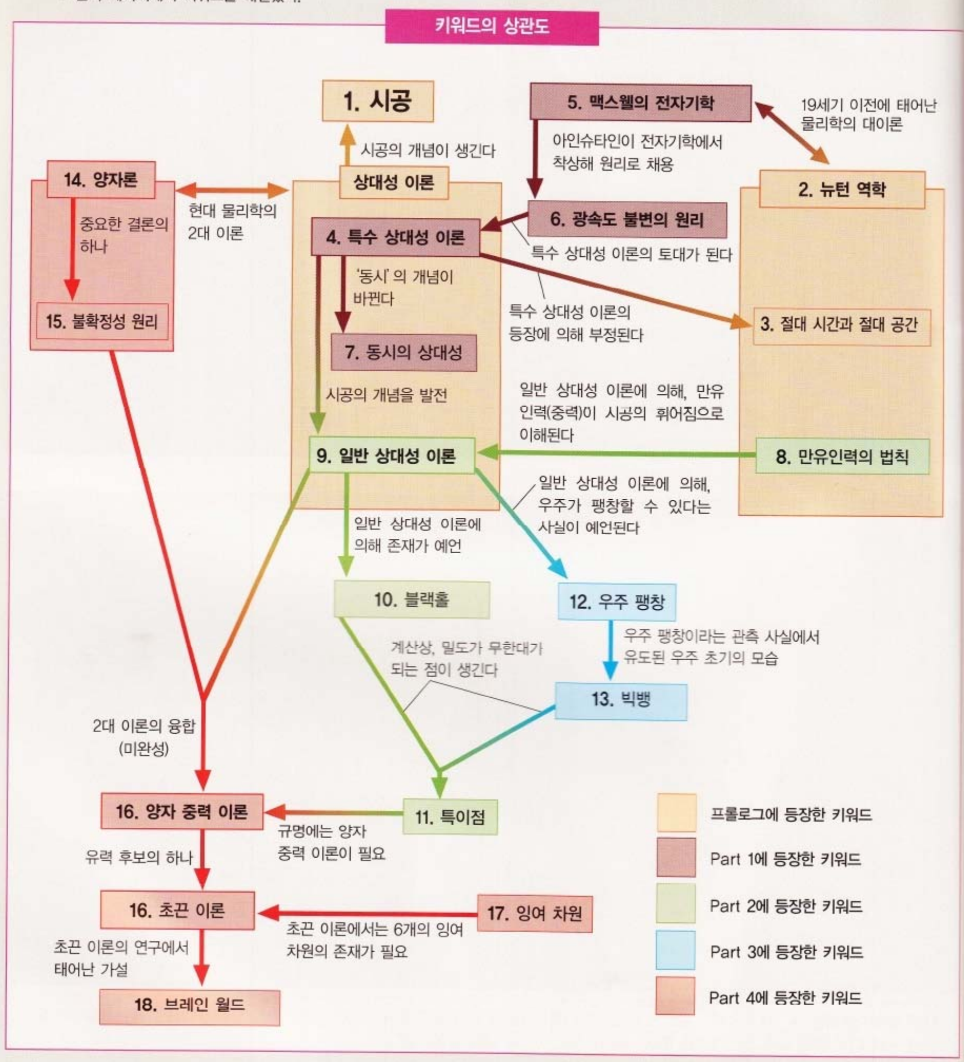
❑ What cover In this Chapter?

- Simultaneity in Special Relativity
- Four-Vectors and Relativistic Collisi**o**ns
- Symmetry Properties of Special Relativity
- Poincare Group

주요 사항의 관계를 한눈에 알 수 있다

'시공'을 이해하기 위한 키워드

마지막으로 특집 기사에 등장하는 중요한 키워드를 정리한다. 왼쪽 페이지에서는 키워드끼리의 관계성을 도해하고, 오른쪽 페이지에서 키워드를 해설했다.



키워드의 해설

1. 시공 (특집 전체, 특히 12, 44쪽)
시간과 공간을 일체로 간주한 명칭. 1905년에 알베르트 아인슈타인(1879~1955)이 발표한 특수 상대성 이론(4)에 근거한 생각. 특수 상대성 이론에 따르면, 시간과 공간은 보는 입장에 따라 하나가 되어 신축하는데, 떼어서 생각할 수는 없다.

2. 뉴턴 역학 (14쪽)
힘을 받은 물체가 어떻게 운동하는가에 대해 아이작 뉴턴(1642~1727)이 정리한 물리학. 저서 〈프린키피아(자연 철학의 수학적 원리)〉에서 태양의 만유인력(8)(중력)의 영향을 받은 행성이 어떻게 운동하는가 등을 밝혔다.

3. 절대 시간과 절대 공간 (14쪽)
뉴턴에 의한 시간과 공간의 생각. 절대 시간은 '아무 것에도 영향 받지 않고 한결같이 흐르는 시간', 절대 공간은 '아무 것에도 영향 받지 않고 모든 운동의 기준이 될 수 있는 정지한 공간'을 말한다. 20세기 초에 특수 상대성 이론(4)이 등장할 때까지, 과학자 사이에서 인정받았던 시간관, 공간관이다.

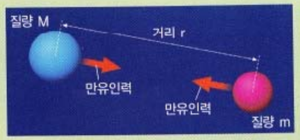
4. 특수 상대성 이론 (Part 1 전체)
'광속도 불변의 원리(6)'를 토대의 하나로 해서 아인슈타인이 1905년에 세운 시공의 이론. 운동 속도에 따라 시간과 공간이 하나가 되어 신축한다는 것을 밝혀냈다. 운동 속도가 광속에 가까워지면 시간의 흐름이 느려지고 길이가 줄어든다.

5. 맥스웰의 전자기학 (34쪽)
제임스 맥스웰(1831~1879)이 정리한 전기와 자기에 관한 물리학. 맥스웰의 이론에서는 전자기파의 속도, 즉 광속의 수치를 유도할 수 있다. 아인슈타인이 특수 상대성 이론(4)을 구상할 때 광속도 불변의 원리(6)를 채용하는 계기가 되었다.

6. 광속도 불변의 원리 (34쪽)
보는 사람의 운동 속도에 관계없이 광속(진공 중에서의 빛의 속도, 자연계의 최고 속도)은 언제나 일정하다는 원리. 아인슈타인은 이미 확립되어 있던 전자기학(5)에서 착상을 얻어 이 원리를 채용하고 특수 상대성 이론(4)을 구축했다. 또 광속의 수치는 파장에 관계없이 일정하다. 물이나 유리, 공기 등 물질 중에서는 빛의 속도가 느려진다.

7. 동시의 상대성 (42쪽)
특수 상대성 이론(4)에 따르면, 앨리스가 보아 존이 어떤 속도로 운동하고 있는 경우(두 사람 사이에 상대 속도가 있는 경우), 공간적으로 떨어져 있는 두 사건이 동시인지 아닌지는 둘 사이에서 일치하지 않는다(한쪽에게는 동시로 보여도, 상대방에게는 동시가 아니다)

8. 만유인력의 법칙 (48쪽)
질량을 가진 물체끼리는 만유인력(중력)으로 서로 잡아당긴다는 법칙. 질량 M과 질량 m인 물체가 거리 r만큼 떨어져 있을 때, 두 물체 사이에는 질량 M과 m에 비례하고, 거리 r의 제곱에 반비례하는 만유인력이 작용한다. 뉴턴이 발견했다.



9. 일반 상대성 이론 (Part 2 전체)
특수 상대성 이론(4)을 발전시켜, 아인슈타인이 1915~1916년에 세운 시공과 중력의 이론. 질량을 가진 물체의 주위 시공이 휘어진다(공간이 휘어지고, 시간의 흐름이 장소에 따라 달라진다)는 것을 밝혔다. 시공의 휘어짐이 물체에 미치는 영향이 중력의 본질이라고 생각한다.

10. 블랙홀 (60~65쪽)
극단적으로 시공이 휘어 있기 때문에 빛마저도 흡수하는 영역을 말한다. 구면(球面) 모양의 블랙홀의 경계면을 '사건의 지평면'이라고 부른다. 사건의 지평면의 내부에 들어간 빛은 탈출할 수 없다. 또 사건의 지평면에서는 시간의 흐름이 정지된다.

11. 특이점 (60, 74쪽)
블랙홀(10)의 중심이나 팽창하는 우주(12)를 과거로 거슬러 올라가면 나타난다. 계산상 크기가 0이고 밀도나 중력의 세기(시공이 휘어진 정도)가 무한대로 되는 점. 일반 상대성 이론(9)이 적용되지 않는 점이다.
특이점이나 그 주변의 시공이 실제로 어떻게 되어 있는지는 수수께끼인데, 그것을 이해하기 위해서는 양자론과 일반 상대성 이론을 융합시킨 '양자 중력 이론'(16)이 필요하다.

12. 우주 팽창 (Part 3 전체)
우주 공간이 팽창하고 있다는 사실은 1929년에 에드윈 허블(1889~1953)의 천문 관측을 통해 밝혀졌다. 이론적으로는 이에 앞선 1922년에, 알렉산드르 프리드만(1888~1925)이 일반 상대성 이론(9)에 근거해 우주 공간이 팽창하거나 수축한다는 것을 지적했다.

13. 빅뱅 (74쪽)
주로 다음의 세 가지 의미로 쓰이는 말.
① 우주의 탄생 자체 ② 고온·고밀도의 '불덩어리 상태'인 초기 우주 ③ 고온·고밀도의 '불덩어리 상태'인 초기 우주가 일으킨 폭발적인 팽창.
137억 년 전에는 우주의 모든 물질이나 빛이 작은 영역에 가두어져서 '불덩어리 상태'가 되었으며, 거기에서 폭발적인 우주 팽창(12)이 시작되었다고 한다.

14. 양자론 (76~79쪽)
상대성 이론(4와 9)과 같은 시기인 20세기 초에 탄생한 양자 역학을 기초로 하는 물리학 이론의 총칭. 주로 미시 세계의 현상을 다룬다. 상대성 이론과 나란히 현대 물리학의 2대 이론의 하나이다.

15. 불확정성 원리 (78쪽)
양자론(14)의 중요한 결론의 하나. '미시 세계에서는 모든 것이 확정되지 않는다.'는 원리. 불확정성 원리에 따르면 미시 시공은 심하게 휘어져 있다. 이와 같은 미시 시공에는 일반 상대성 이론(9)이 적용되지 않는다. 미시 시공의 이해에는 일반 상대성 이론과 양자론을 융합시킨 양자 중력 이론(16)이 필요하다.

16. 양자 중력 이론과 초끈 이론 (76~83쪽)
양자론(14)과 일반 상대성 이론(9)을 융합시키는 미완성의 이론은 '양자 중력 이론'이라고 불린다. 양자 중력 이론의 후보에는 여러 가지가 있는데, 그 유력한 후보가 '초끈 이론'이다. 다수가 발견된 소립자(전자 등, 그 이상 분해되지 않는 입자)는 초끈 이론에서는 극히 작은 '끈'인데, 끈의 진동 방식이 다르면 우리에게는 다른 소립자로 보인다고 한다. 단, 초끈 이론은 미완성이며 실험적으로 실증된 것은 아니다.

17. 잉여 차원 (82~85쪽)
3개의 공간 차원과 1개의 시간 차원으로 이루어진 '4차원 시공'을 넘는 5차원 이상의 시공 차원을 말한다. 초끈 이론(16)이 옳다면, 6개(모델에 따라서는 7개)의 잉여 차원이 존재하는 셈이 된다. 일반적으로는 원자핵보다 더 작은 크기의 잉여 차원이 숨어 있기 때문에 우리는 그 존재를 알아차리지 못한다고 한다.

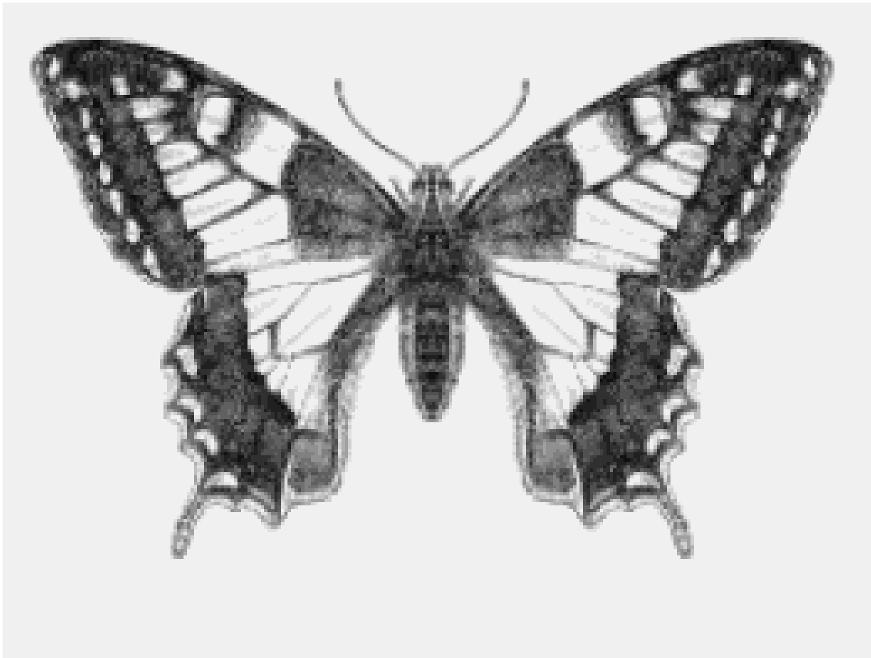
18. 브레인 월드 가설 (84쪽)
우리가 사는 4차원 시공은 고차원 시공에 뜬 막(브레인)과 같은 존재라고 생각하는 가설. 초끈 이론(16)의 연구 과정에서 나온 생각. 잉여 차원(17)은 종래에 생각되어 온 것처럼 극단적으로 작은 것이 아니라, 0.01 mm 정도 이하(특수한 모델에서는 무한대)라고 한다. 물질이나 빛이 브레인에서 떨어지지 않기 때문에, 우리는 잉여 차원의 존재를 알아차리지 못한다고 생각한다.

Line Symmetry

- Shape has line symmetry when one half of it is the mirror image of the other half.

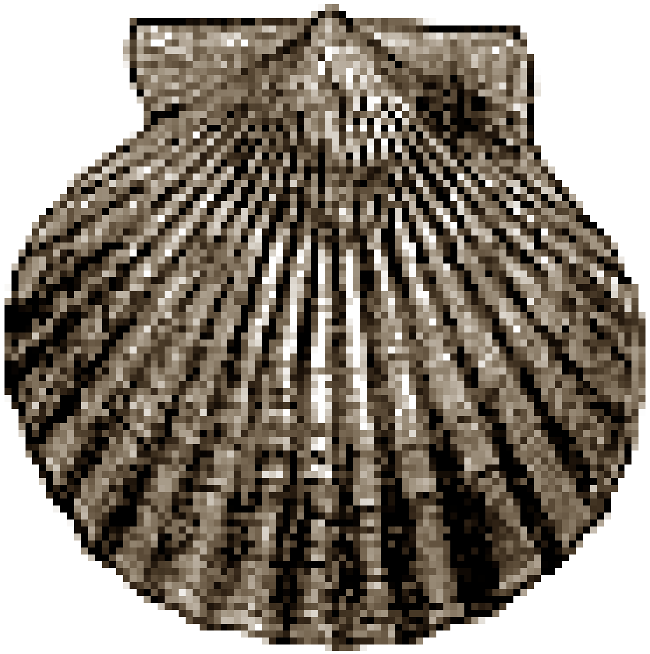
- Symmetry exists all around us and many people see it as being a thing of beauty.

Is a butterfly symmetrical?

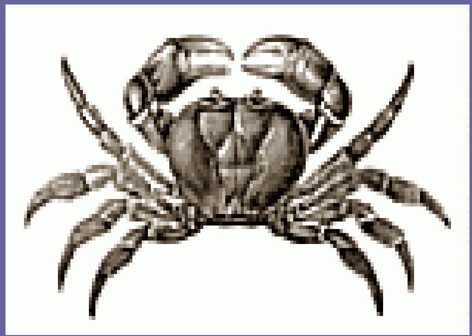


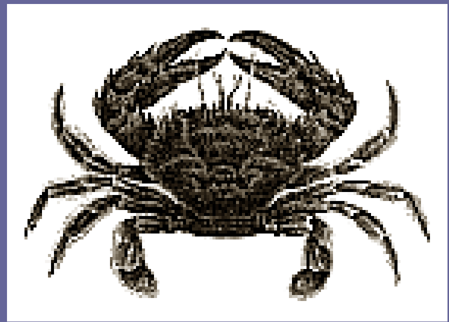
Line Symmetry exists in nature but you may not have noticed.

At the beach there are a variety of shells with line symmetry.

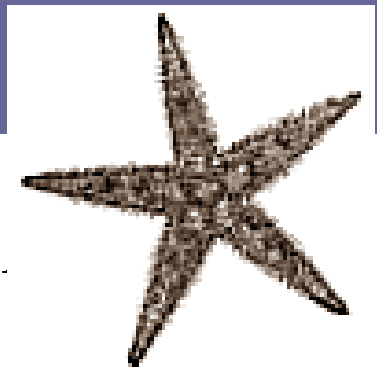


Under the sea there are also many symmetrical objects such as these crabs

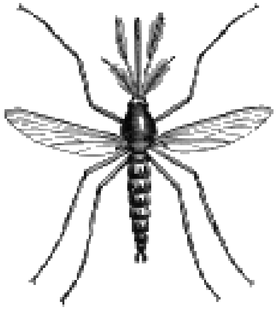


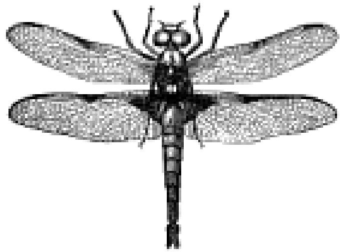


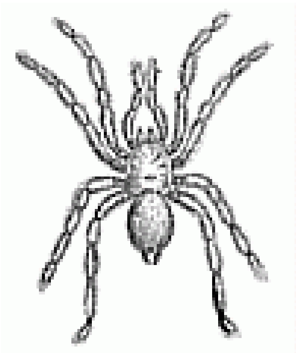
and this starfish.



Animals that have Line Symmetry





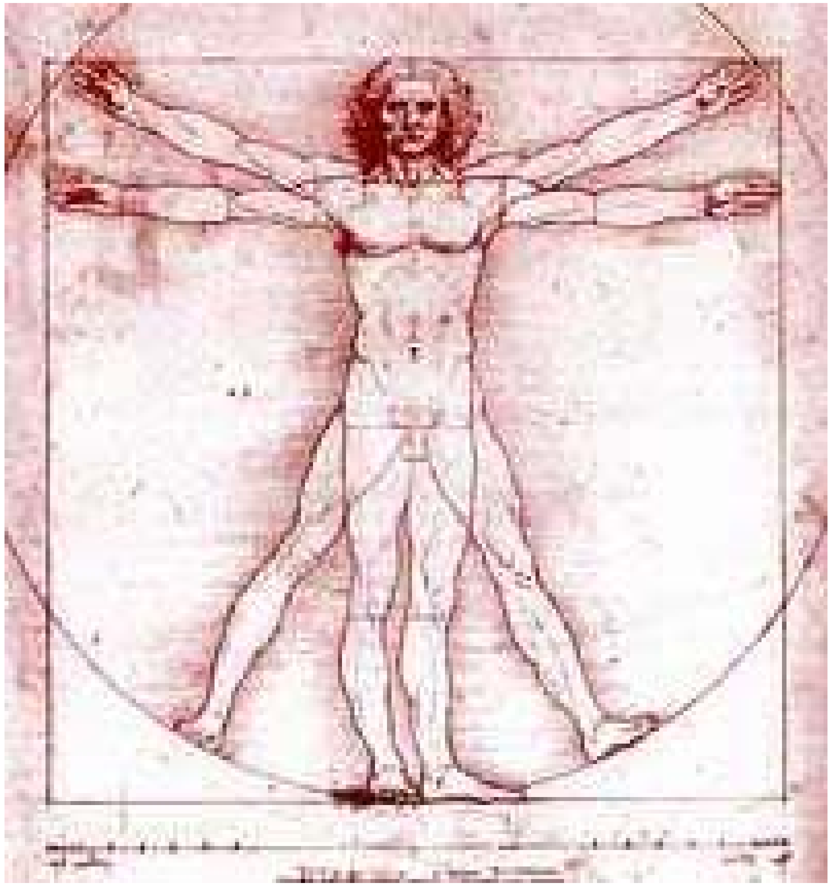


THESE MASKS HAVE SYMMETRY

These masks have a line of symmetry from the forehead to the chin.

The human face also has a line of symmetry in the same place.

Human Symmetry



The 'Proportions of Man' is a famous work of art by Leonardo da Vinci that shows the symmetry of the human form.

REFLECTION IN WATER

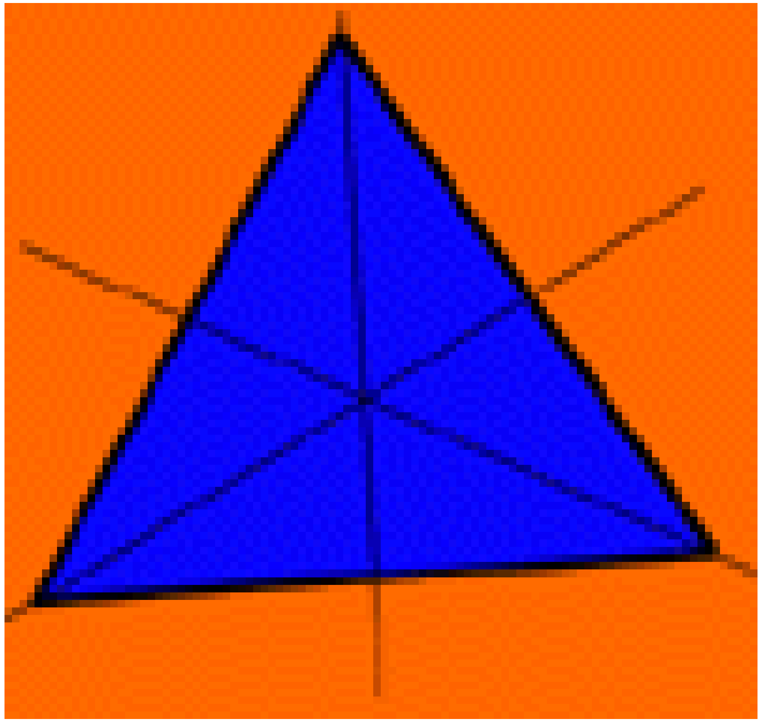
If an object is reflected in water it is considered to have line symmetry along the waterline.

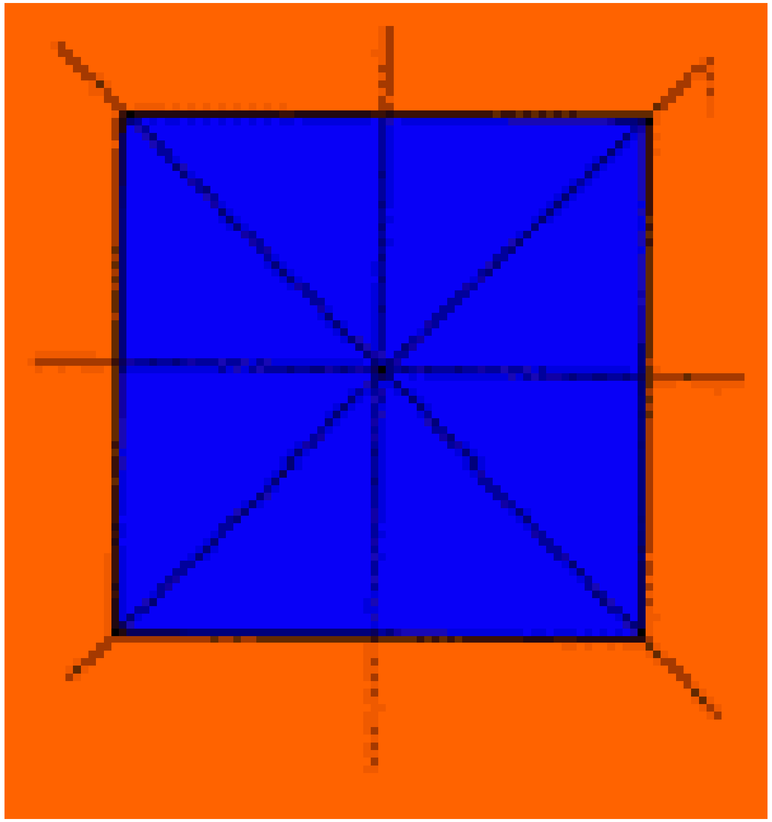
The Taj Mahal

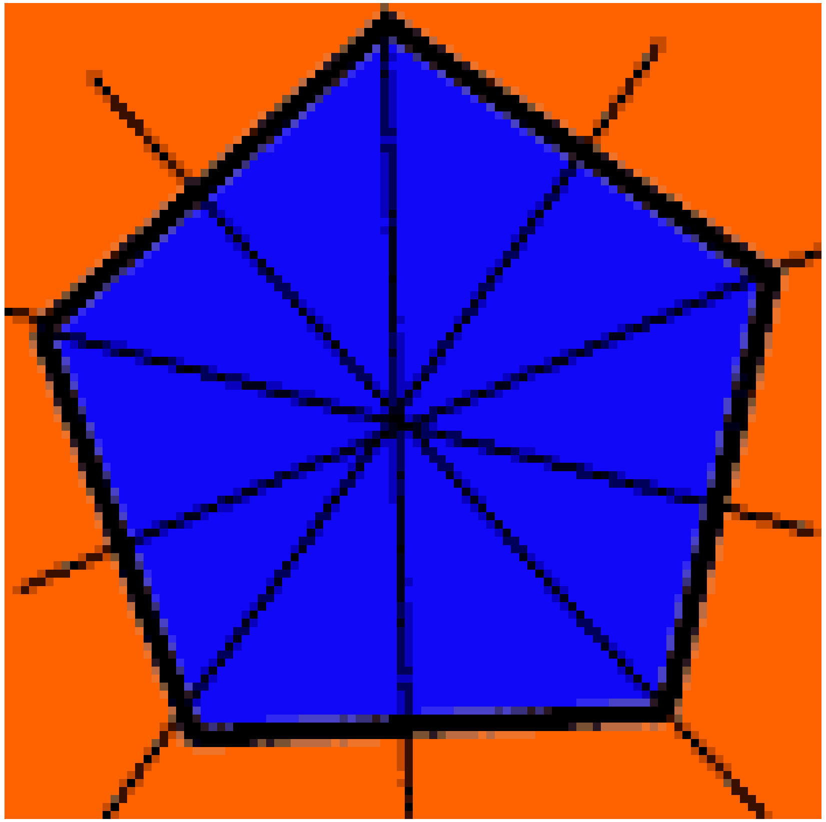
Symmetry exists in architecture all around the world. The best known example of this is the Taj Mahal.

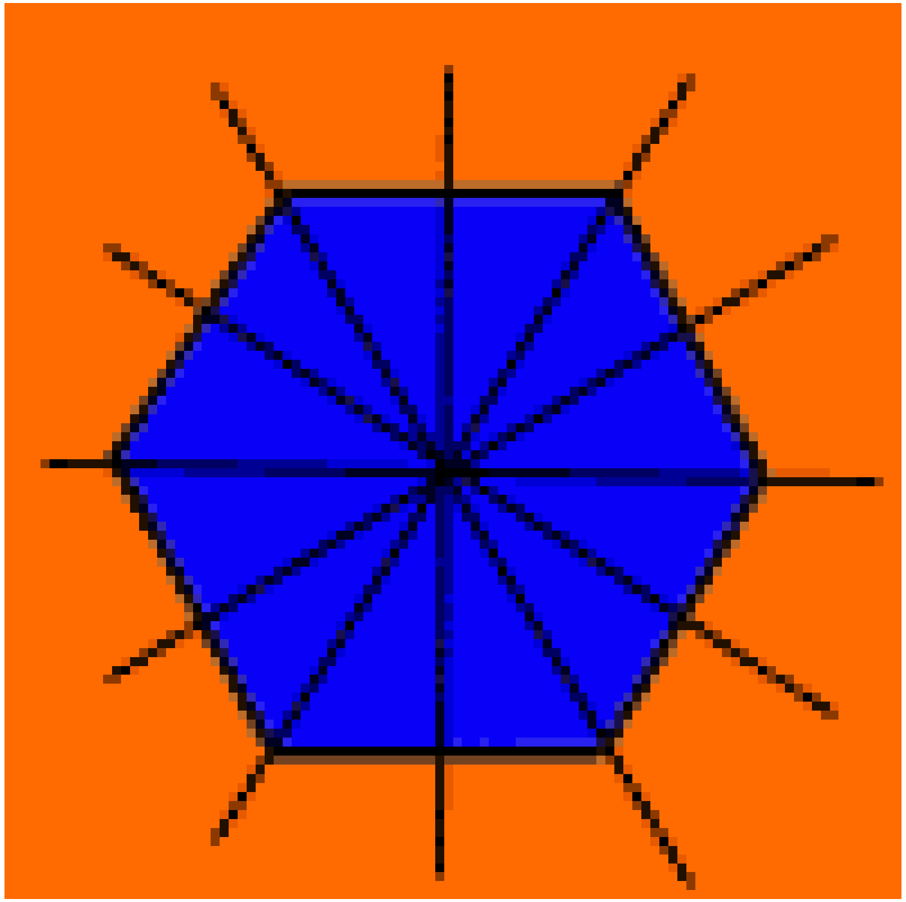
2D Shapes and Symmetry

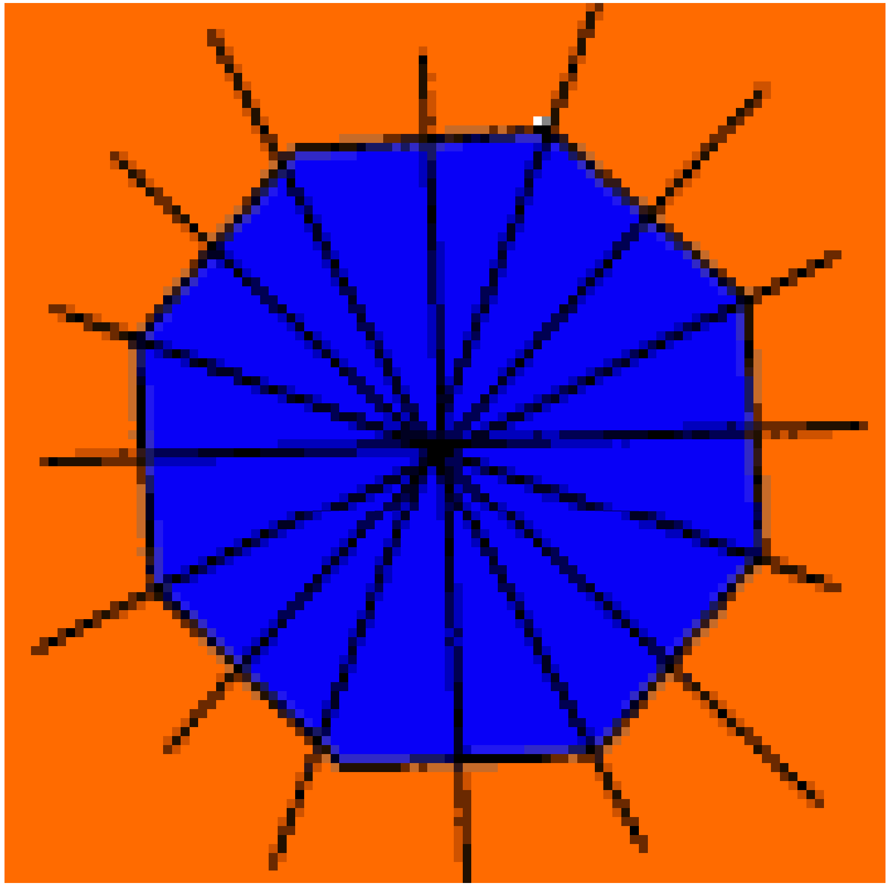
After investigating the following shapes by cutting and folding, we found:











❑Symmetries and Conservation Law

Symmetry	Conservation
Translation in time	Energy
Translation in space	Momentum
Rotation	Angular momentum
Gauge transformation	Charge

Noether’s Theorem:
Symmetries <-> Conservation

Symmetry in Physics

- Symmetry is the most crucial concepts in Physics.
  - Symmetry principles dictate the basic laws of Physics, and define the fundamental forces of Nature.
- Symmetries are closely linked to the particular dynamics of the system:
  - E.g., strong and EM interactions conserve C, P, and T. But, weak interactions violate all of them.
- Different kinds of symmetries:
  - Continuous or Discrete
  - Global or Local
  - Dynamical
  - Internal

We focus on this

Examples of Symmetry Operations

Translation in Space
Translation in Time
Rotation in Space
Lorentz Transformation
Reflection of Space (*P*)
Charge Conjugation (*C*)
Reversal of Time (*T*)
Interchange of Identical Particles
Change of Q.M. Phase
Gauge Transformations

Conserved Quantities and Symmetries

Every conservation law corresponds to an invariance of the Hamiltonian (or Lagrangian) of the system under some transformation. **We call these invariances *symmetries*.**

There are 2 types of transformations: continuous and discontinuous

Continuous $\rightarrow$ give additive conservation laws

$x \rightarrow x+dx$ or $\theta \rightarrow \theta + d\,\theta$

examples of conserved quantities:

- electric charge
- momentum
- baryon #

Discontinuous $\rightarrow$ give multiplicative conservation laws

parity transformation: $x, y, z \rightarrow (-x), (-y), (-z)$

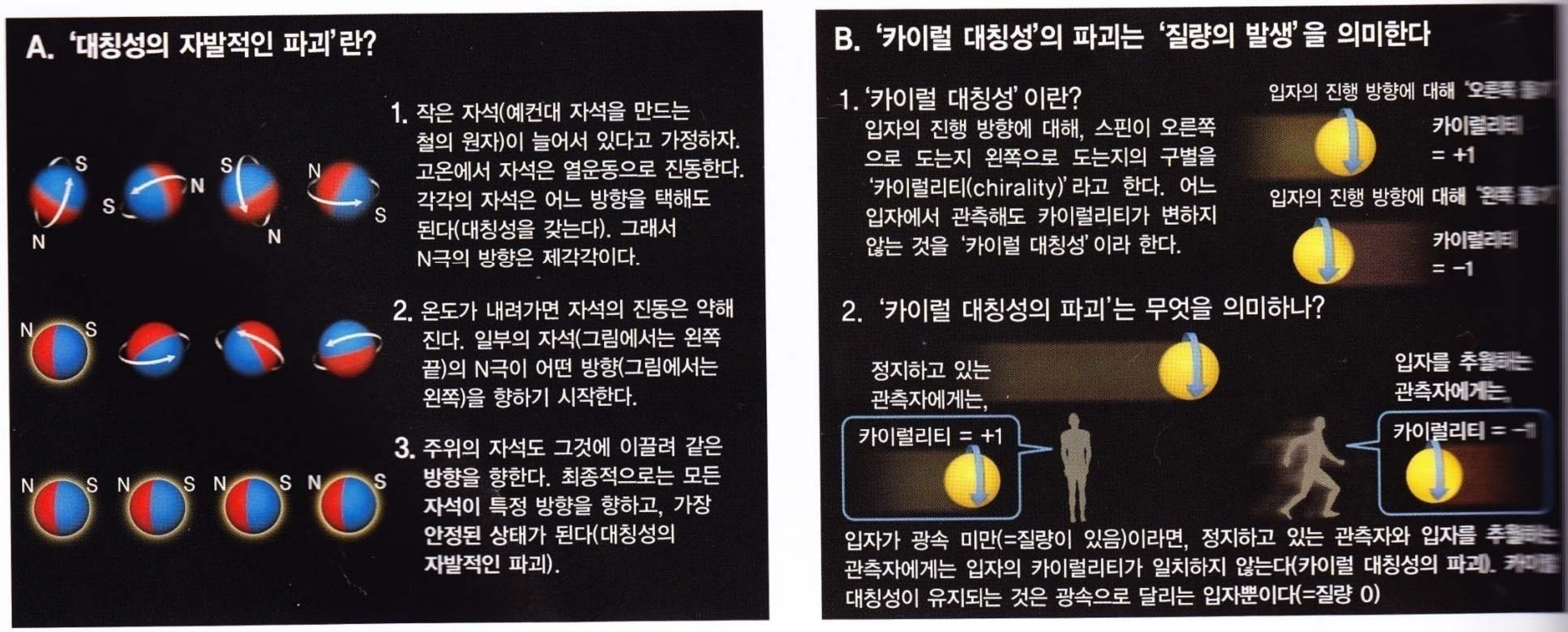
charge conjugation (particle$\leftrightarrow$antiparticle): $e^- \rightarrow e^+$

examples of conserved quantities:

- parity (in strong and EM)
- charge conjugation (in strong and EM)
- parity *and* charge conjugation (strong, EM, almost always in weak)

카이럴 대칭성

카이럴 대칭성 => 입자의 진행 방향에 대하여 스핀이 오른쪽 회전 (+1)
스핀이 왼쪽 회전 (−1)



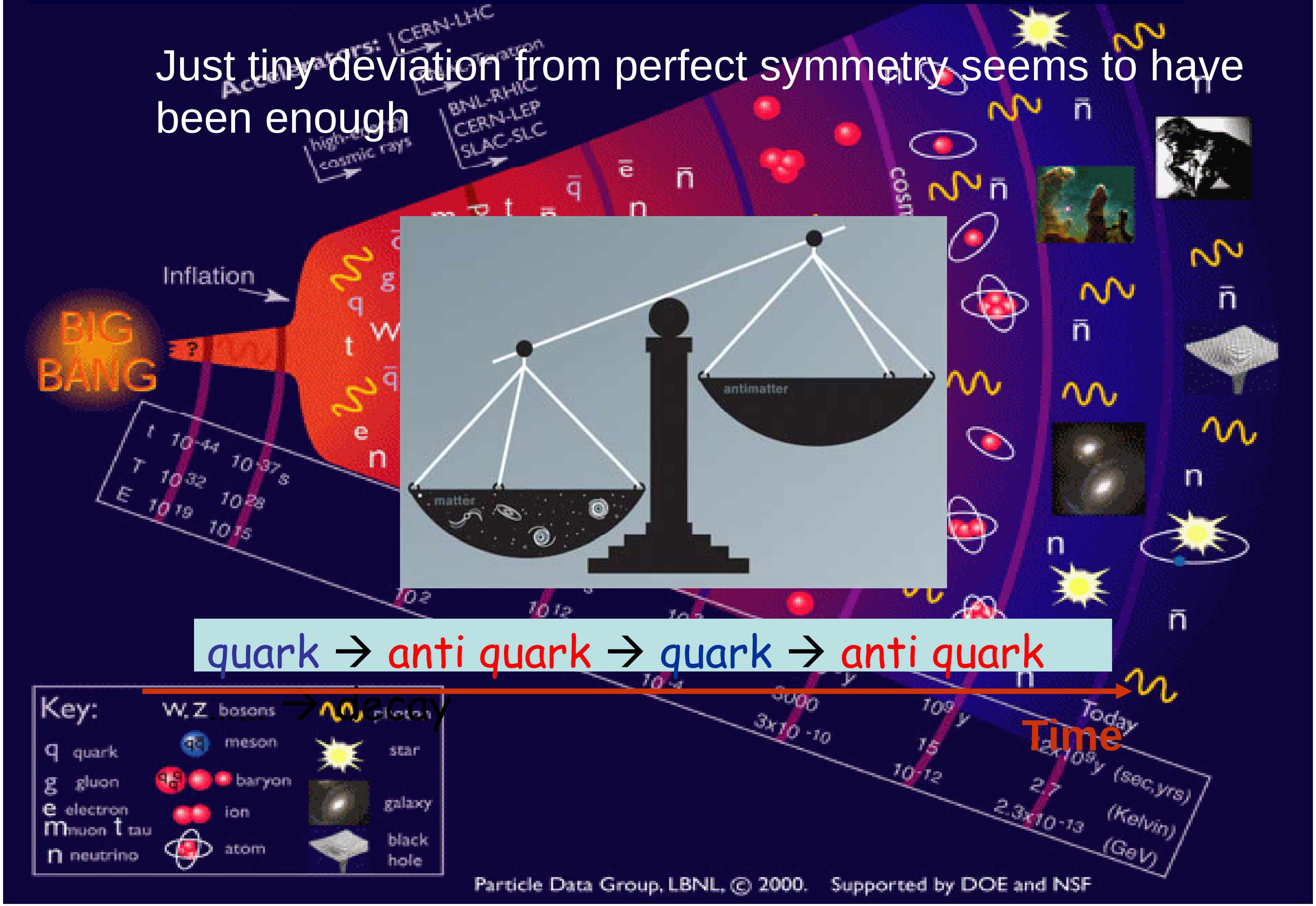
16

질량이 없는 광자만 카이럴 대칭성을 가진다.
=> "카이럴 대칭성" 파괴는 질량을 가진다.

Nanbu 노벨상2008

We are all the children of Broken symmetry

Just tiny deviation from perfect symmetry seems to have been enough



quark → anti quark → quark → anti quark

→ decay

Time

❑Group <= The set of all symmetry operations

- **A group is a set of elements plus a composition rule (a, b, c, I ,.. $\in$ G) such that**

  1. Combining two elements under the rule(•) gives another of the elements

  a, b $\in$ G, => a •b $\in$ G

  2. There is an identify element I so that for arbitrary a in the group elements

  a • I = I • a = a

  3. For arbitrary a, there exists unique inverse a^{-1} with

  $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = I$

  4. The composition rule is associative

  a • (b • c) = (a • b) • c

Lorentz Transformation

$$\Lambda(\omega)=\begin{bmatrix}\cosh\omega & 0 & 0 & \sinh\omega\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \sinh\omega & 0 & 0 & \cosh\omega\end{bmatrix}. \tag{2.27}$$

From this, one can find the following interesting properties of $\Lambda(\omega)$:

$$\begin{array}{lll} 1. & \Lambda(\omega)\Lambda(\omega')=\Lambda(\omega+\omega') \quad ; & \textit{Closure} \\ 2. & {}^{\exists}\Lambda(0)=I \quad ; & {}^{\exists}\textit{Identity} \\ 3. & {}^{\exists}\Lambda^{-1}(\omega)=\Lambda(-\omega) \quad ; & {}^{\exists}\textit{Inverse} \\ 4. & \Lambda(\omega)\{\Lambda(\omega')\Lambda(\omega'')\} = \{\Lambda(\omega)\Lambda(\omega')\}\Lambda(\omega'') \quad ; & \textit{Associativity} \end{array} \tag{2.28}$$

These four properties are exactly the properties of a group in mathematics. Thus, one finds that the Lorentz transformation satisfies the group properties and can be given by a group representation. There are two distinguished groups in mathematics. One group is called a discrete group and the other is called a continuous group. Since the above example of Lorentz transformation has continuous group elements represented by a continuous variable ω, the above example belongs to the continuous group. The continuous group has been investigated thoroughly by a Norwegian mathematician Sophus Lie (1842-1899) and thus people often call the continuous group as Lie group[21]. The basic Lie groups of $n\times n$ matrices M (d is the dimension of the group) are listed in the following Table 2.1.

Table 2.1: Basic Lie Groups

GL(n, C)	General(G) linear(L) group of complex(C) regular($\det M \neq 0$) matrices ; $d=2n^2$
SL(n, C)	Special(S: $\det M = 1$) linear group, subgroup of GL(n, C); $d=2(n^2-1)$
GL(n, R)	General linear group of real(R) regular matrices; $d=n^2$
SL(n, R)	Special linear group of real matrices, a subgroup of GL(n, R); $d=n^2-1$
U(n)	Unitary group of unitary(U : $MM^\dagger = M^\dagger M = 1$, where $M^\dagger$ is the Hermitian conjugate of M) matrices; $d=n^2$
SU(n)	Special unitary group, a subgroup of U(n); $d=n^2-1$
O(n, C)	Orthogonal(O) group of complex orthogonal matrices ($MM^T=1$, where M^T is the transposed M); $d=n(n-1)$
O(n)≡O(n, R)	Orthogonal group of real orthogonal matrices, $d=n(n-1)/2$
SO(n)	Special orthogonal group or group of rotations in n-dimensional space, a subgroup of O(n); $d=n(n-1)/2$
Sp(n)	Symplectic(Sp) group of unitary $n\times n$ matrices, where n is even, satisfying the condition $M^TJM=J$, where J is a nonsingular antisymmetrical matrix.
U(m, $n-m$)	Pseudo-unitary group of complex matrices satisfying the condition $MgM^\dagger = g$, where g is a diagonal matrix with elements $g_{kk}=1$ for $1\le k\le m$ and $g_{kk}=-1$ for $m+1\le k\le n; d=n^2$
O(m, $n-m$)	Pseudo-orthogonal group of real matrices satisfying the condition $MgM^T=g; d=n(n-1)/2$

Unitary Group U(1)

Ex] The set of all complex phase factors of a wave function

$U(\theta) = e^{i\theta}$ where θ is a real parameter.

(a) $U(\theta)U(\theta') = e^{i(\theta+\theta')} = U(\theta+\theta') \in$ Group

(b) $U(0) = I$

$(\because)$ $U(\theta)U(-\theta) = U(-\theta)U(\theta) = U(0) = I$

(c) $\forall \theta$, $U^{-1}(\theta) = U(-\theta)$

(d) Associative law

$$[U(\theta_1)U(\theta_2)]U(\theta_3) = e^{i\theta_1+\theta_2} e^{i\theta_3}$$
$$= e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}$$
$$= e^{i\theta_1} e^{i(\theta_2+\theta_3)}$$
$$= U(\theta_1) U(\theta_2+\theta_3)$$
$$= U(\theta_1)[U(\theta_2)U(\theta_3)]$$

$\Rightarrow$ One dimensional Unitary Group "U(1)"

① Each element is characterized by a continuous parameter θ, $0 \le \theta \le 2\pi$.

② $dU = U(\theta + d\theta) - U(\theta)$

$$= e^{i(\theta + d\theta)} - e^{i\theta}$$

$$= e^{i\theta}(1 + i\,d\theta) - e^{i\theta}$$

$$= i e^{i\theta} d\theta$$

$$= i U d\theta$$

So the elements are differentiable

⇒ Lie Group

Lie Group can be written as

$$E(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} i\,\theta_i F_i\right)$$

For the n parameters,

there are n of the quantities F_i

Called Generators of Lie Group

Generators F_i

⇒ Physically, they can be thought as generating the transformations

SU(n) group

- Special det|U| =1
- Unitary $U^{+}U=1$
- The # of independent elements

$$=\overbrace{2}^{\text{complex}}n^2\overbrace{-1}^{\text{Unitarity}}\ \underbrace{-n}_{\text{diagonal}}\ -\ \overbrace{2}^{\text{Upper/lower}}*\underbrace{\boxed{(n^2-n)/2}}_{\text{Off-diagonal}}$$

$$= n^2-1$$

ex) SU(2) => $2^2-1=3$

A complex flavor-mixing matrix?

Why not incorporate CPV by making β complex?

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha \end{pmatrix}$$

not so simple:	**a 2x2 matrix has**	**8 parameters**
	unitarity:	**4 conditions**
	4 quark fields:	**3 free phases**

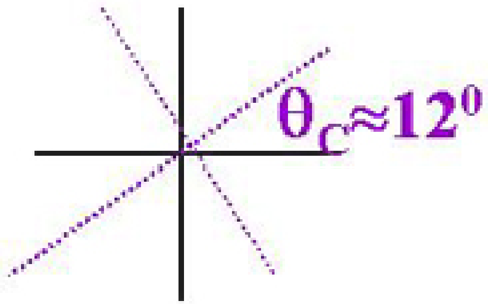
# of irreducible parameters: 1

2-generation flavor-mixing

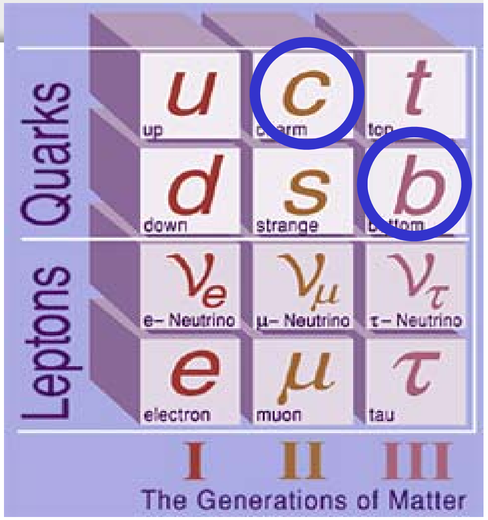
$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C \\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C \end{pmatrix}$$

Only 1 free parameter: the Cabibbo angle

not enough degrees of
freedom to incorporate a
complex number



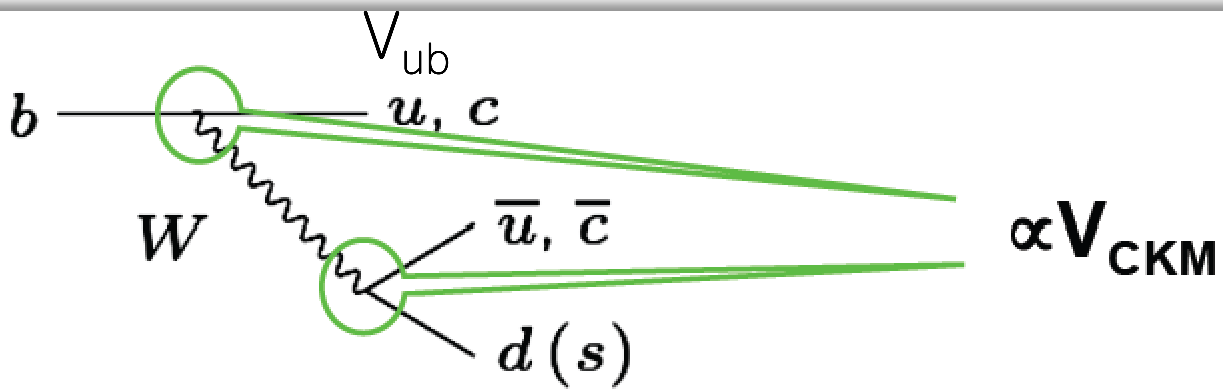
❑Cabibbo Angle

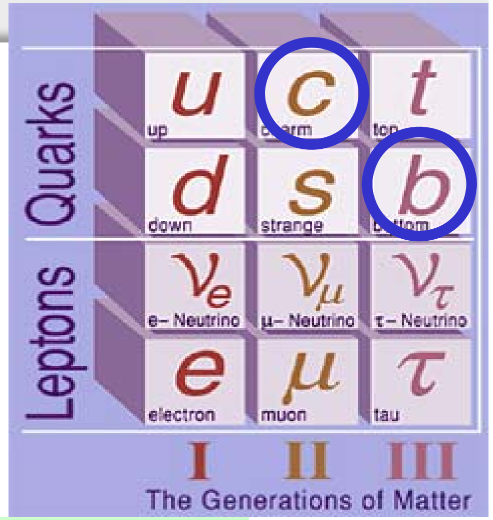


$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_c & \sin \vartheta_c \\ -\sin \vartheta_c & \cos \vartheta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

35

- CKM Matrix





$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

Enter Kobayashi Maskawa

Suppose there are 3 quark generations:

a 3x3 matrix has	**18 parameters**
unitarity:	**9 conditions**
6 quark fields:	**5 free phases**
# of irreducible parameters:	**4**

three are needed
for 3-dim rotation
(e.g. Euler angles)

one complex
phase is possible!

KM (+others) circa 1973 (Kyoto)

Makoto Kobayashi

Toshihide Maskawa

38

Original KM paper

From: Prog. of Theor. Phys. Vol. 49 Feb. 2, 1973

Next we consider a 6-plet model, another interesting model of CP-violation. Suppose that 6-plet with charges $(Q, Q, Q, Q-1, Q-1, Q-1)$ is decomposed into $SU_{weak}(2)$ multiplets as $2+2+2$ and $1+1+1+1+1+1$ for left and right components, respectively. Just as the case of (A, C), we have a similar expression for the charged weak current with a 3×3 instead of 2×2 unitary matrix in Eq. (5). As was pointed out, in this case we cannot absorb all phases of matrix elements into the phase convention and can take, for examp

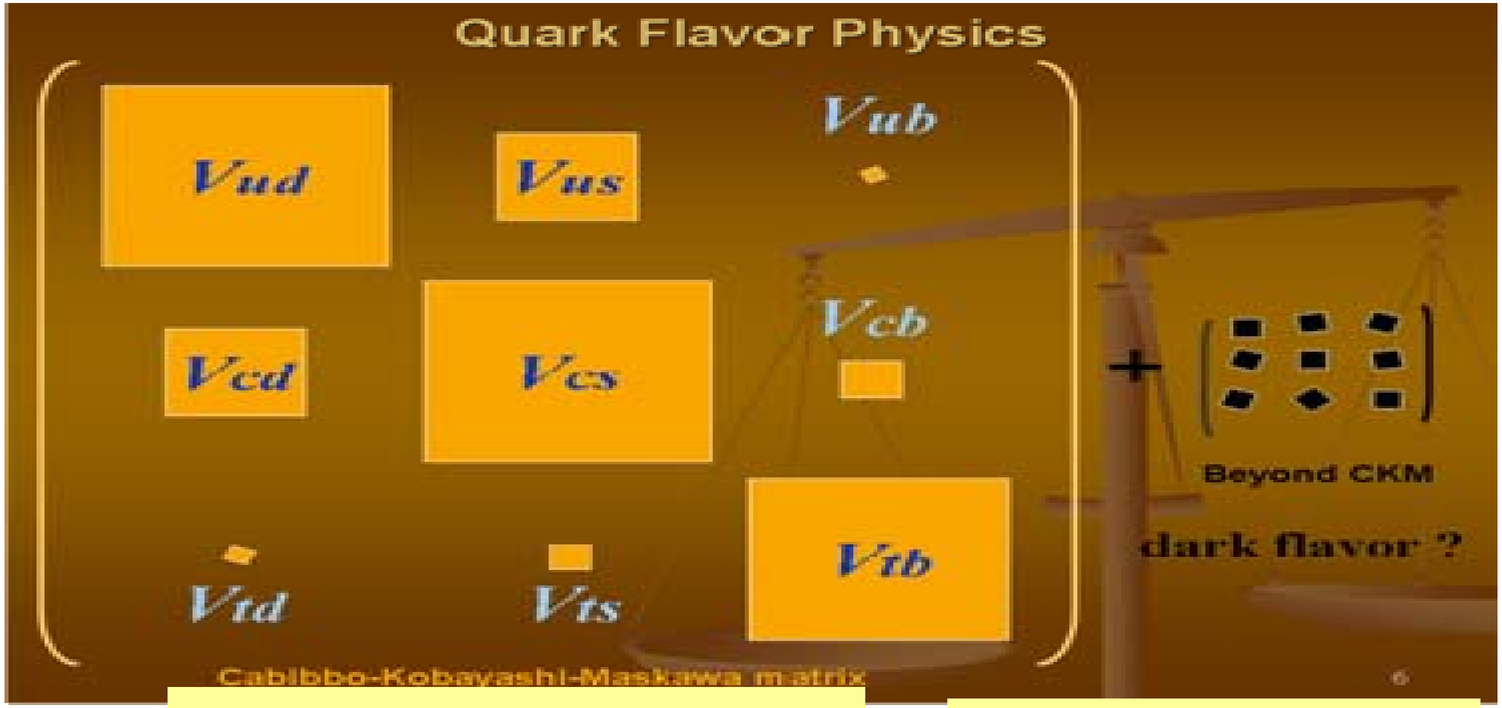
❑The CKM Matrix

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

Unitary with 9*2 numbers → 4 independent parameters

Many ways to write down matrix in terms of these parameters

❑Heavy Flavor Physics



Foundation

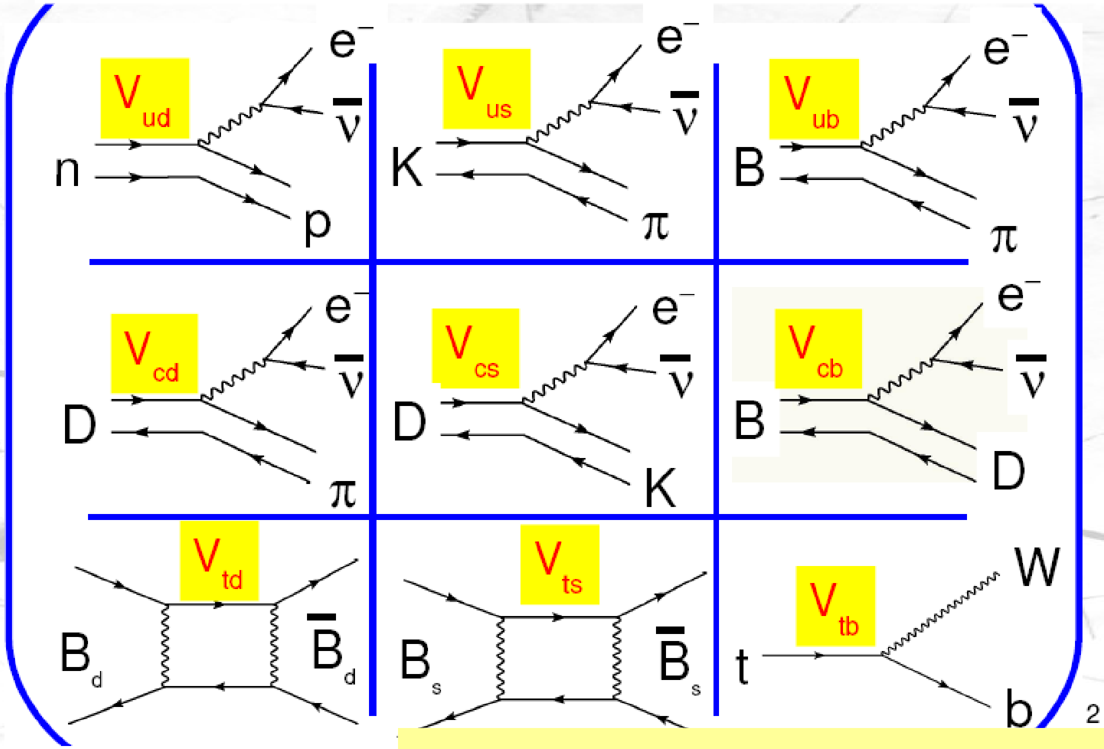
New Physics

- 정밀측정으로 표준모형의 검증 => 새로운 물리 현상

41

CKM matrix elements

- Fundamental parameters of the Standard Model
- They cannot be predicted but can be measured



F. Di Lodovico, ICHEP 2008

- Introduce a new variable called rapidity ω, and represent the boosting velocity $v = \beta c$ as follows :

$$\beta = \frac{v}{c} = \tanh \omega$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{sec}\,h^2 \omega}} = \cosh \omega$$

-

$$\Lambda^u_v = \Lambda(\omega) = \begin{bmatrix} \cosh\omega & 0 & 0 & \sinh\omega \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\omega & 0 & 0 & \cosh\omega \end{bmatrix}$$

❑ Reference

Standard algebraic expressions

The hyperbolic functions are:

- Hyperbolic sine:

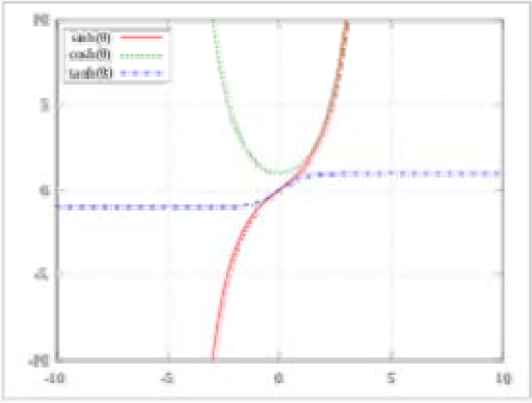
$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

- Hyperbolic cosine:

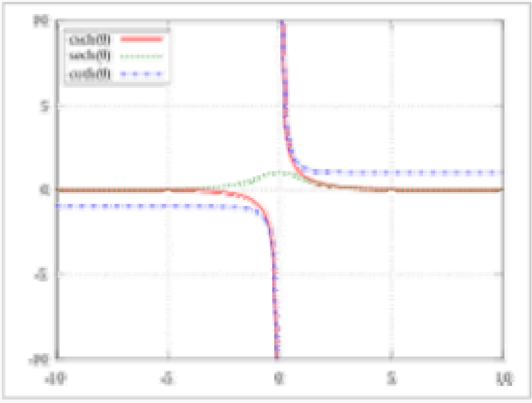
$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

- Hyperbolic tangent:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$



sinh, cosh and tanh



csch, sech and coth

- $\Lambda(\omega)$ is Lie group

1. Closure : two succesive Lorentz transformations result in a new Lorentz transformation

$$\Lambda_2{}^T \Lambda_1{}^T g \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2{}^T g \Lambda_2 = g$$

2. Associativity : clearly $\Lambda_1(\Lambda_2\Lambda_3) = (\Lambda_1\Lambda_2)\Lambda_3$
(composition law of matrix multiplication)

3. Identity : $\exists \Lambda(0) = I$

4. Inverse : $\exists \Lambda^{-1}(\omega) = \Lambda(-\omega)$

5. Continuous : Has continuous group elements
represented by a continuous variable ω

- General form of transformation of space and time

$$\underbrace{x'^{u} = \Lambda^{u}_{v} x^{v}}_{\text{Lorentz transformation + rotation}} + \underbrace{a^{u}}_{\text{space and time translation}}$$

Lorentz transformation
+ rotation

space and time translation

⟹=> Poincare group, ISL(2,C)

❑ Operation involved in the Poincare group

- 10 operations of transformation,

3 boosts ⟶ 3 boost momenta, $\vec{K}$
3 rotations ⟶ 3 angular momenta, $\vec{J}$
3 space translations ⟶ 3 linear momenta, $\vec{P}$
1 time translation ⟶ 1 energy, E

- Conjugate to the transformation parameter,

$$\vec{K} \xleftrightarrow{Conjugate} \vec{\omega}, \vec{v}$$

$$\vec{J} \longleftrightarrow \vec{\theta}$$

$$\vec{P} \longleftrightarrow \vec{x}$$

$$E \longleftrightarrow \vec{t}$$

- represent the space and time by 2X2 matrix $\underline{X}$

$$\underline{X} = x^u \sigma_u = \begin{bmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{bmatrix}$$

where

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

-

$$x^u = \frac{1}{2} Tr(\sigma_u \underline{X})$$

❑ Poincare group (cont'd)

- 2X2 matrix representation of the Lorentz transformation and the rotation given by

$$\underline{\Lambda}(\vec{\theta},\vec{\omega}) = \exp(-\frac{i}{2}(\vec{\theta}+i\vec{\omega})\cdot\vec{\sigma}) \equiv \underline{\Lambda}$$

- Then the elements of the poincare group are ordered pair of 2X2 matrices given by $(\underline{\Lambda},\underline{a})$ and $(-\underline{\Lambda},\underline{a})$ where, $\det\underline{\Lambda} = 1$

$$\frac{1}{2}Tr(\underline{\Lambda}\underline{\Lambda}^{\dagger}) = \Lambda^0_0 \geq 1$$

$$\underline{a}^{\dagger} = \underline{a}$$

- Show that $S_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ satisfies the Lie algebra for the angular moementum; $[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}S_k$.
- Show that $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a})^2 = \boldsymbol{a}^2 = \sum_i a_i^2$, where $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3)$ is a real vector.
- Show that $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})^{2n} = 1$, where $\hat{\boldsymbol{n}}^2 = 1$.
- Show that $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})^{2n+1} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$.
- Show that $U = e^{i\frac{\phi}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}} = e^{i\phi\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}$ produces the rotation along the axis $\hat{\boldsymbol{n}}$ by an angle ϕ.
- Show that $U = e^{i\frac{\phi}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}} = 1 \ \cos\frac{\phi}{2} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \sin\frac{\phi}{2}$.

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2} + i\hat{n}_3 \sin\frac{\phi}{2} & i\left(\hat{n}_1 - i\hat{n}_2\right)\sin\frac{\phi}{2} \\ i\left(\hat{n}_1 + i\hat{n}_2\right)\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} - i\hat{n}_3 \sin\frac{\phi}{2} \end{pmatrix}$$

8. Consider a Lorentz boost $\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$, where

$L = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$. Show that the boost matrix can be expressed as $L = e^{\alpha\sigma_1} = 1\ \cosh\alpha + \sigma_1\ \sinh\alpha$, where

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

References

- Also, the second rank tensor of the Lorentz transformation and the rotaion is given by

$$\Lambda^u_v = \frac{1}{2} Tr(\sigma_u \underline{\Lambda} \sigma_u \underline{\Lambda}^\dagger)$$

- four-vector a^u is given by

$$a^u = \frac{1}{2} Tr(\sigma_u \underline{a})$$

- Then, the ISL(2,C) transformation of the space-time space is given by

$$\underline{X}' = \underline{\Lambda}\,\underline{X}\,\underline{\Lambda}^\dagger + \underline{a}$$

, there are 10 parameters of the transformation given by $\vec{\omega}, \vec{\theta}, a^u$

- Homogeneous part of poincare group is called the ‘proper orthochronous Lorentz group’

- Other possible conditions of $\underline{\Lambda}$ such as

$$\det \underline{\Lambda} = -1, \Lambda^0_0 \geq 1 \longrightarrow \text{Parity (P)}$$

$$\det \underline{\Lambda} = -1, \Lambda^0_0 \leq 1 \longrightarrow \text{Time reversal (T)}$$

$$\det \underline{\Lambda} = +1, \Lambda^0_0 \leq 1 \longrightarrow \text{Charge conjugation (C)}$$

- Unitary representation of ISL(2,C) given by

$$U(\underline{\Lambda}(\overrightarrow{\theta},\overrightarrow{\omega}),\underline{a}) = e^{-i(\vec{J}\cdot\vec{\theta}+\vec{K}\cdot\vec{\omega}+P^{u}\cdot a_{u})}$$

- Then, the infinitesimal generators are given by

$$K^{j} = i\frac{\partial}{\partial\omega^{j}}U(\underline{\Lambda},\underline{a})\Big|_{\vec{\omega}=\vec{\theta}=a^{u}=0}$$

$$J^{j} = i\frac{\partial}{\partial\theta^{j}}U(\underline{\Lambda},\underline{a})\Big|_{\vec{\omega}=\vec{\theta}=a^{u}=0}$$

$$P^{u} = ig^{uv}\frac{\partial}{\partial a^{v}}U(\underline{\Lambda},\underline{a})\Big|_{\vec{\omega}=\vec{\theta}=a^{u}=0}$$

Among 10 generators, there are 45 commutation relations

- 45 commutation among 10 generators

$$[J^i, J^k] = -i\varepsilon^{jkl} J^l$$

$$[K^i, K^k] = -i\varepsilon^{jkl} J^l$$

$$[J^j, K^k] = i\varepsilon^{jkl} K^l$$

$$[P^u, P^v] = 0$$

$$[K^j, P^0] = -iP^j$$

$$[J^j, P^0] = 0$$

$$[K^k, P^j] = -i\delta_{jk} P^0$$

$$[J^j, P^k] = i\varepsilon^{jkl} P^l$$

$$\underbrace{\varepsilon^{jkl}}_{Levi-Civita\ Symbol}$$

❑references

- Onbitnuri Kim
- M.A. Thompson
- Newton Magazine

Thank you.