September 28 , 2010

Special Relativity

Kihyeon Cho

Syllabus

- Introduction (Chap. 1)
- Special Relativity (Chap. 2)
  - Special Relativity
  - Symmetry (Group)
- Quantum Mechanics (Chap. 3)
- Detector
- Data Processing
- Feynman diagram (Chap. 4)
- QED (Chap. 5)
- QCD (Chap. 6)
- Weak interaction (Chap. 7)

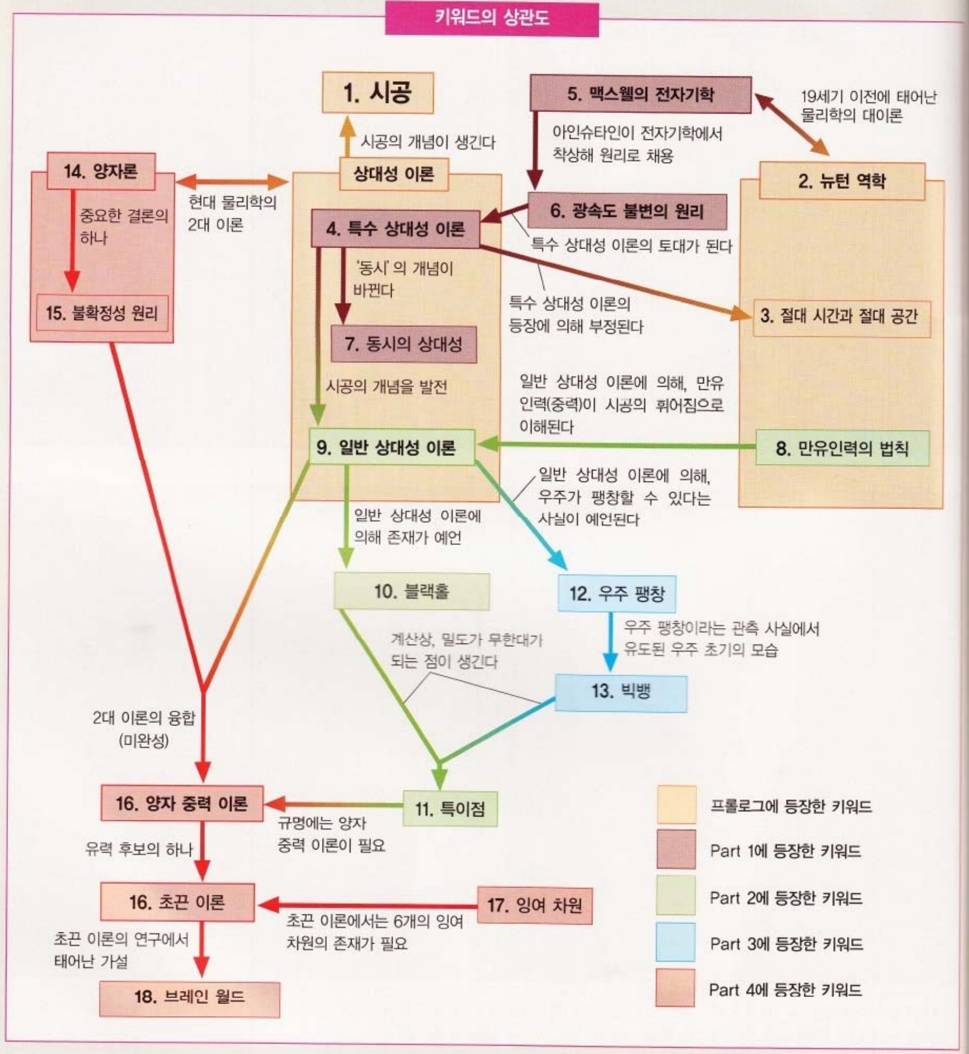
❑ What cover In this Chapter?

- Simultaneity in Special Relativity
- Four-Vectors and Relativistic Collisi**o**ns
- Symmetry Properties of Special Relativity
- Poincare Group

주요 사항의 관계를 한눈에 알 수 있다

'시공'을 이해하기 위한 키워드

마지막으로 특집 기사에 등장하는 중요한 키워드를 정리한다. 왼쪽 페이지에서는 키워드끼리의 관계성을 도해하고, 오른쪽 페이지에서 키워드를 해설했다.



1. 시공 (특집 전체, 특히 12, 44쪽)
시간과 공간을 일체로 간주한 명칭. 1905년에 알베르트 아인슈타인(1879~1955)이 발표한 특수 상대성 이론(4)에 근거한 생각. 특수 상대성 이론에 따르면, 시간과 공간은 보는 입장에 따라 하나가 되어 신축하는데, 떼어서 생각할 수는 없다.

2. 뉴턴 역학 (14쪽)
힘을 받은 물체가 어떻게 운동하는가에 대해 아이작 뉴턴(1642~1727)이 정리한 물리학. 저서 《프린키피아(자연 철학의 수학적 원리)》에서 태양의 만유인력(8)(중력)의 영향을 받은 행성이 어떻게 운동하는가 등을 밝혔다.

3. 절대 시간과 절대 공간 (14쪽)
뉴턴에 의한 시간과 공간의 생각. 절대 시간은 '아무 것에도 영향 받지 않고 한결같이 흐르는 시간', 절대 공간은 '아무 것에도 영향 받지 않고 모든 운동의 기준이 될 수 있는 정지한 공간'을 말한다. 20세기 초에 특수 상대성 이론(4)이 등장할 때까지, 과학자 사이에서 인정받았던 시간관, 공간관이다.

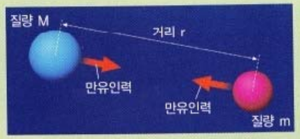
4. 특수 상대성 이론 (Part 1 전체)
'광속도 불변의 원리(6)'를 토대의 하나로 해서 아인슈타인이 1905년에 세운 시공의 이론. 운동 속도에 따라 시간과 공간이 하나가 되어 신축한다는 것을 밝혀냈다. 운동 속도가 광속에 가까워지면 시간의 흐름이 느려지고 길이가 줄어든다.

5. 맥스웰의 전자기학 (34쪽)
제임스 맥스웰(1831~1879)이 정리한 전기와 자기에 관한 물리학. 맥스웰의 이론에서는 전자기파의 속도, 즉 광속의 수치를 유도할 수 있다. 아인슈타인이 특수 상대성 이론(4)을 구상할 때 광속도 불변의 원리(6)를 채용하는 계기가 되었다.

6. 광속도 불변의 원리 (34쪽)
보는 사람의 운동 속도에 관계없이 광속(진공 중에서의 빛의 속도. 자연계의 최고 속도)은 언제나 일정하다는 원리. 아인슈타인은 이미 확립되어 있던 전자기학(5)에서 착상을 얻어 이 원리를 채용하고 특수 상대성 이론(4)을 구축했다. 또 광속의 수치는 파장에 관계없이 일정하다. 물이나 유리, 공기 등 물질 중에서는 빛의 속도가 느려진다.

7. 동시의 상대성 (42쪽)
특수 상대성 이론(4)에 따르면, 앨리스가 보아 존이 어떤 속도로 운동하고 있는 경우(두 사람 사이에 상대 속도가 있는 경우), 공간적으로 떨어져 있는 두 사건이 동시인지 아닌지는 둘 사이에서 일치하지 않는다(한쪽에게는 동시로 보여도, 상대방에게는 동시가 아니다)

8. 만유인력의 법칙 (48쪽)
질량을 가진 물체끼리는 만유인력(중력)으로 서로 잡아당긴다는 법칙. 질량 M과 질량 m인 물체가 거리 r만큼 떨어져 있을 때, 두 물체 사이에는 질량 M과 m에 비례하고, 거리 r의 제곱에 반비례하는 만유인력이 작용한다. 뉴턴이 발견했다.

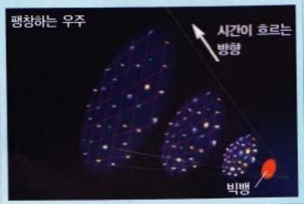


9. 일반 상대성 이론 (Part 2 전체)
특수 상대성 이론(4)을 발전시켜, 아인슈타인이 1915~1916년에 세운 시공과 중력의 이론. 질량을 가진 물체의 주위 시공이 휘어진다(공간이 휘어지고, 시간의 흐름이 장소에 따라 달라진다)는 것을 밝혔다. 시공의 휘어짐이 물체에 미치는 영향이 중력의 본질이라고 생각한다.

10. 블랙홀 (60~65쪽)
극단적으로 시공이 휘어 있기 때문에 빛마저도 흡수하는 영역을 말한다. 구면(球面) 모양의 블랙홀의 경계면을 '사건의 지평면'이라고 부른다. 사건의 지평면의 내부에 들어간 빛은 탈출할 수 없다. 또 사건의 지평면에서는 시간의 흐름이 성지된다.

11. 특이점 (60, 74쪽)
블랙홀(10)의 중심이나 팽창하는 우주(12)를 과거로 거슬러 올라가면 나타난다. 계산상 크기가 0이고 밀도나 중력의 세기(시공이 휘어진 정도)가 무한대로 되는 점. 일반 상대성 이론(9)이 적용되지 않는 점이다.
특이점이나 그 주변의 시공이 실제로 어떻게 되어 있는지는 수수께끼인데, 그것을 이해하기 위해서는 양자론과 일반 상대성 이론을 융합시킨 '양자 중력 이론'(16)이 필요하다.

12. 우주 팽창 (Part 3 전체)
우주 공간이 팽창하고 있다는 사실은 1929년에 에드윈 허블(1889~1953)의 천문 관측을 통해 밝혀졌다. 이론적으로는 이에 앞선 1922년에, 알렉산드르 프리드만(1888~1925)이 일반 상대성 이론(9)에 근거해 우주 공간이 팽창하거나 수축한다는 것을 지적했다.



13. 빅뱅 (74쪽)
주로 다음의 세 가지 의미로 쓰이는 말.
① 우주의 탄생 자체 ② 고온 · 고밀도의 '불덩어리 상태'인 초기 우주 ③ 고온 · 고밀도의 '불덩어리 상태'인 초기 우주가 일으킨 폭발적인 팽창.
137억 년 전에는 우주의 모든 물질이나 빛이 작은 영역에 가두어져서 '불덩어리 상태'가 되었으며, 거기에서 폭발적인 우주 팽창(12)이 시작되었다고 한다.

14. 양자론 (76~79쪽)
상대성 이론(4와 9)과 같은 시기인 20세기 초에 탄생한 양자 역학을 기초로 하는 물리학 이론의 총칭. 주로 미시 세계의 현상을 다룬다. 상대성 이론과 나란히 현대 물리학의 2대 이론의 하나이다.

15. 불확정성 원리 (78쪽)
양자론(14)의 중요한 결론의 하나. '미시 세계에서는 모든 것이 확정되지 않는다.'는 원리. 불확정성 원리에 따르면 미시 시공은 심하게 휘어져 있다. 이와 같은 미시 시공에는 일반 상대성 이론(9)이 적용되지 않는다. 미시 시공의 이해에는 일반 상대성 이론과 양자론을 융합시킨 양자 중력 이론(16)이 필요하다.

16. 양자 중력 이론과 초끈 이론
(76~83쪽)
양자론(14)과 일반 상대성 이론(9)을 융합시키는 미완성의 이론은 '양자 중력 이론'이라고 불린다. 양자 중력 이론의 후보에는 여러 가지가 있는데, 그 유력한 후보가 '초끈 이론'이다. 다수가 발견된 소립자(전자 등, 그 이상 분해되지 않는 입자)는 초끈 이론에서는 극히 작은 '끈'인데, 끈의 진동 방식이 다르면 우리에게는 다른 소립자로 보인다고 한다. 단, 초끈 이론은 미완성이며 실험적으로 실증된 것은 아니다.

17. 잉여 차원 (82~85쪽)
3개의 공간 차원과 1개의 시간 차원으로 이루어진 '4차원 시공'을 넘는 5차원 이상의 시공 차원을 말한다. 초끈 이론(16)이 옳다면, 6개(모델에 따라서는 7개)의 잉여 차원이 존재하는 셈이 된다. 일반적으로는 원자핵보다 더 작은 크기의 잉여 차원이 숨어 있기 때문에 우리는 그 존재를 알아차리지 못한다고 한다.

18. 브레인 월드 가설 (84쪽)
우리가 사는 4차원 시공은 고차원 시공에 뜬 막(브레인)과 같은 존재라고 생각하는 가설. 초끈 이론(16)의 연구 과정에서 나온 생각. 잉여 차원(17)은 종래에 생각되어 온 것처럼 극단적으로 작은 것이 아니라, 0.01 mm 정도 이하(특수한 모델에서는 무한대)라고 한다. 물질이나 빛이 브레인에서 떨어지지 않기 때문에, 우리는 잉여 차원의 존재를 알아차리지 못한다고 생각한다.

상대성 이론과 양자론의 융합으로 우주 탄생과 블랙홀을 이해

물리학자들은 '궁극의 이론'으로 나아가고 있다

지금부터의 Part 4에서는 최첨단 물리학에서 연구되는 **'고차원 시공'**에 대해 소개한다. 여기까지 살펴본 것처럼 우주는 3차원의 공간과 1차원의 시간으로 이루어지는 4차원 시공이다. 그러나 이론물리학 분야에서는, **이 세계에는 우리가 볼 수 없는 4차원 시공을 넘는 5개 이상의 '보이지 않는 차원(공간 차원)이 존재할지도 모른다.'고 한다. 보이지 않은 차원은 '잉여 차원(여분 차원)'이라고 불린다.** 이를 이해하기 위해서는 이론물리학자들이 추구하는 '궁극의 이론'에 대해 알 필요가 있다.

미시 시공의 이해에는 '양자론'도 필요

현대의 물리학은 상대성 이론과 양자론이라는 2대 이론을 토대로 한다. **양자론이란 원자나 소립자(그 이상 분할되지 않는 입자. 전자, 광자 등) 같은 미시 세계를 지배하는 법칙에 대한 이론이다**[※1](**1**). **한편 시공의 이론인 일반 상대성 이론은 주로 거시적인 세계를 다루는 이론이라고 할 수 있다.**

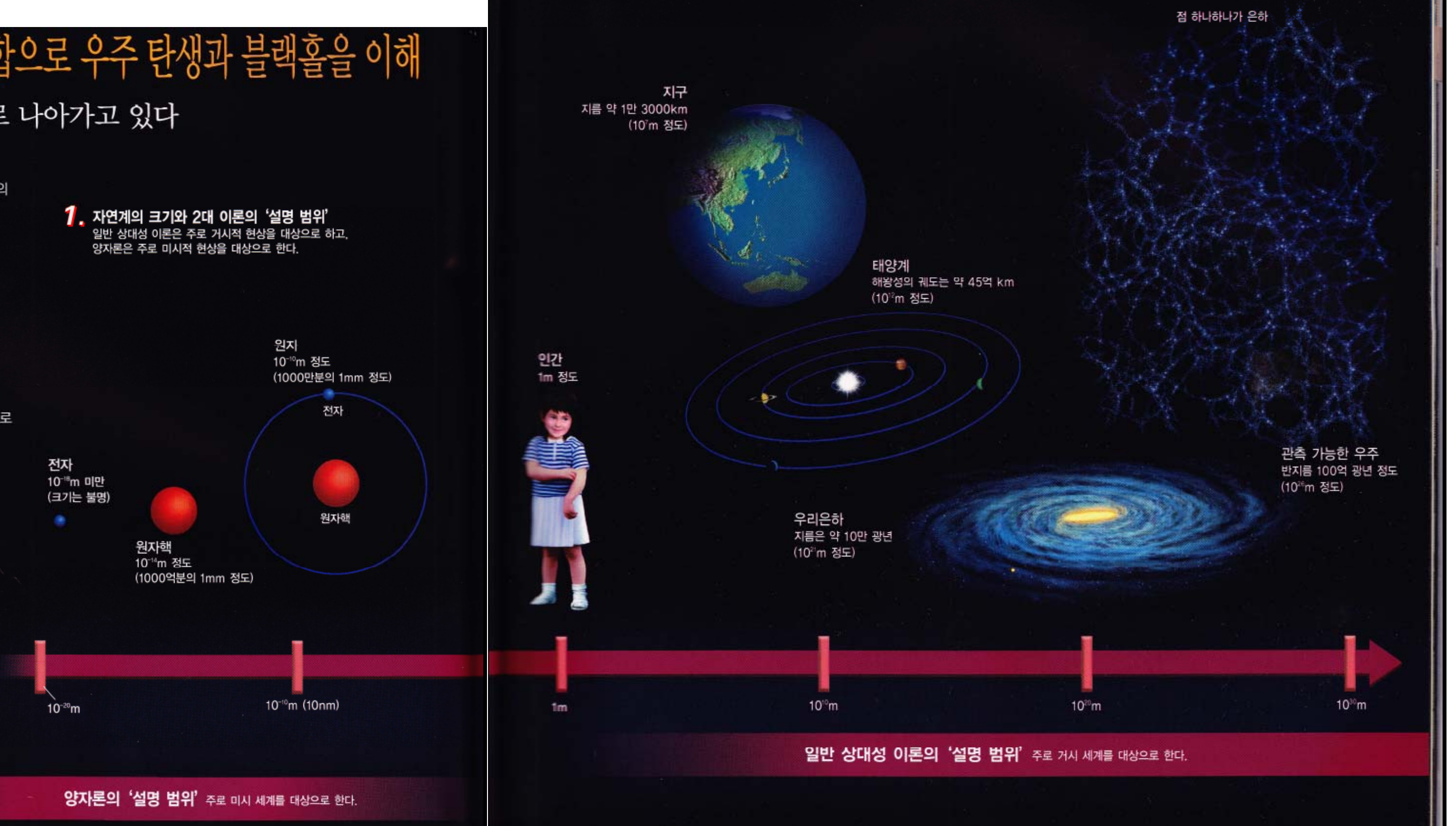
물리학자들은 자연계의 모든 토대가 되는 '궁극의 이론(만물의 이론)'을 완성시키고자 한다. **궁극의 이론이란 이 2대 이론을 융합한 새로운 이론을 의미한다**[※]. 일반 상대성 이론은 중력의 이론이므로, 미완성의 궁극의 이론은 임시로 **'양자 중력 이론(量子重力理論)'**이라고 불린다. 미시 세계에서의 중력을 양자론과 모순되지 않도록 설명할 수 있는 신이론이 궁극의 이론(양자 중력 이론)인 셈이다. 이 2대 이론의 융합은 현재 이론물리학자들의 최대 목표의 하나이다. 그러나 궁극의 이론으로 가는 길은 매우 험난해서, 수십 년에 걸친 이론적인 연구를 통해서도 아직 완성되지 않고 있다.

일반 상대성 이론과 양자론을 융합한 이론이 필요한 것은 '미시의 시공'을 생각하는 경우이다. 블랙홀의 특이점(60쪽)이나 우주 시작의 특이점(74쪽)에서는 막대한 질량이 '미시 영역'에 가두어진다. 그래서 이와 같은 시공에 대해 생각하려면, 일반 상대성 이론에 더해 미시 세계의 이론인 양자론도 고려해야 한다(**2**). 다음 페이지에서는 미시 시공에 대해 더욱 자세히 소개한다.

※1 : '시공'이라는 테마에서 벗어나므로 양자론에 대해서는 자세히 소개하지 않는다. 양자론에 대해 자세히 알고 싶은 분은 '뉴턴 하이라이트 〈누구나 이해할 수 있는 양자론〉'을 참조.

※2 : 특수 상대성 이론과 양자론의 융합은 이미 실현되었는데, '상대론적 장(場)의 양자론'이라고 불린다.

1. 자연계의 크기와 2대 이론의 '설명 범위'
일반 상대성 이론은 주로 거시적 현상을 대상으로 하고, 양자론은 주로 미시적 현상을 대상으로 한다.



2. 일반 상대성 이론과 양자론 양쪽이 필요한 미시 시공

특이점이나 그 주변의 시공의 이해에는 양자 중력 이론이 필요

1905년 스위스 베른에서 $E=mc^2$이 탄생하다

26세의 아인슈타인에게 찾아온 '기적의 해'

"전기 역학의 연구 결론이 머리에 떠올랐다. **물체의 질량을 측정하면, 물체에 포함된 에너지를 바로 알 수 있다.** 이 고찰은 흥미롭고 매력적이다. 그러나 하느님이 이것을 재미로 느끼고 나를 힘들게 할지 어떨지는 알 수 없다."(중간의 일부 생략)

아인슈타인(1879~1955)이 1905년 여름에 친구에게 보낸 편지의 일부이다. 연구 끝에 도달한 $E=mc^2$이라는 결론에 만족을 느끼면서도, 어딘가 확신을 갖지 못한 복잡한 심경이 쓰여 있다.

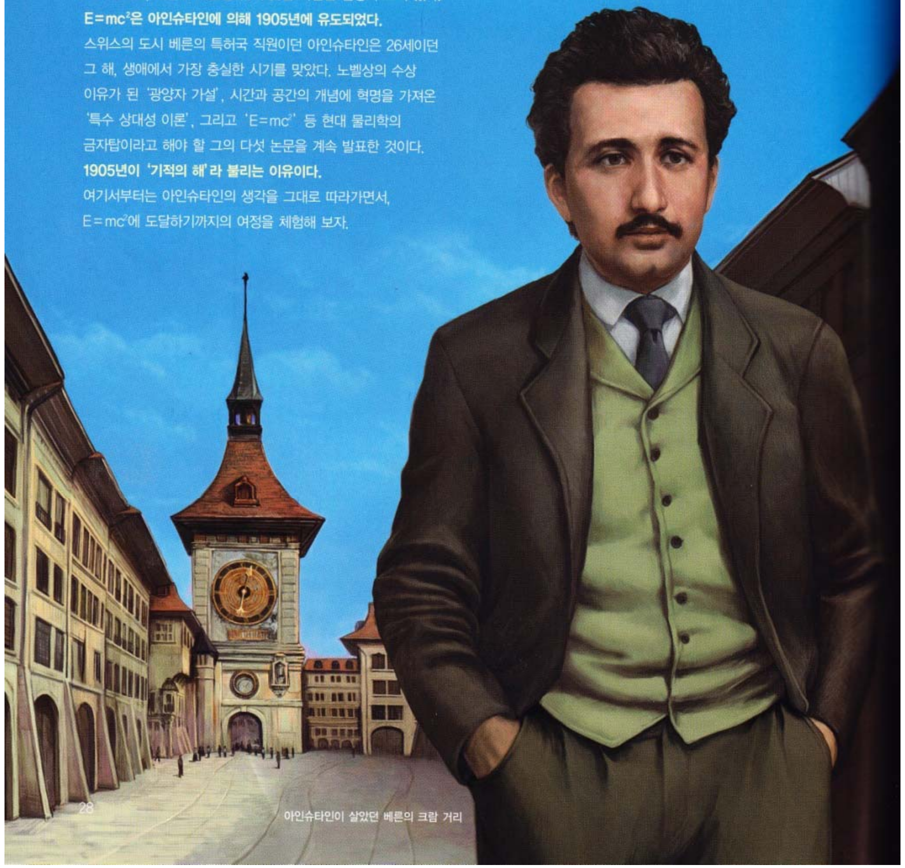
$E=mc^2$은 아인슈타인에 의해 1905년에 유도되었다.

스위스의 도시 베른의 특허국 직원이던 아인슈타인은 26세이던 그 해, 생애에서 가장 충실한 시기를 맞았다. 노벨상의 수상 이유가 된 '광양자 가설', 시간과 공간의 개념에 혁명을 가져온 '특수 상대성 이론', 그리고 '$E=mc^2$' 등 현대 물리학의 금자탑이라고 해야 할 그의 다섯 논문을 계속 발표한 것이다.

1905년이 '기적의 해'라 불리는 이유이다.

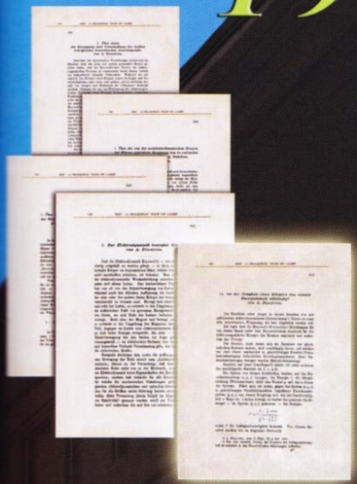
여기서부터는 아인슈타인의 생각을 그대로 따라가면서, $E=mc^2$에 도달하기까지의 여정을 체험해 보자.

알베르트 아인슈타인
(Albert Einstein, 1879~1955)



아인슈타인이 살았던 베른의 크람 거리

1905



'기적의 해' 1905년에 아인슈타인이 발표한 불후의 논문

아인슈타인이 1905년에 발표한 5편의 논문은 오늘날에도 높은 평가를 받는다. 그 가운데서도 '광양자 가설' '브라운 운동 이론' 그리고 '($E=mc^2$을 포함하는) 특수 상대성 이론'은 '3대 업적'으로 불린다.

1905년 3월 논문 '광양자 가설'
Annalen der Physik, 17 (1905)

빛을 입자로 보는 '광양자 가설'을 제창하고, '광전 효과'라 불리는 현상의 메커니즘을 규명했다. 이 가설은 양자 역학의 토대가 되었고, 노벨상 수상의 이유가 되기도 했다.

1905년 4월 논문 〈분자 크기의 새로운 결정법〉
학위 논문

용액의 점성과 아보가드로수(6.02×10^{23}개, 물질 1몰의 분자 수)로부터, 용액에 포함된 분자의 크기를 결정할 수 있다고 논했다. 아인슈타인의 박사 논문인데 가장 인용수가 많다.

1905년 5월 논문 '브라운 운동 이론'
Annalen der Physik, 17 (1905)

19세기에 발견된 '브라운 운동'(액체 중의 미립자의 불규칙 운동)이 물 분자와 미립자의 충돌에 의해 일어난다는 이론을 주창했다. 분자나 원자가 확실히 존재한다는 사실의 증거가 되었다.

1905년 6월 논문 '특수 상대성 이론'
Annalen der Physik, 17 (1905)

'광속도 불변' 등을 전제로 하고, 시간과 공간은 절대적인 것이 아니며 관측하는 입장에 따라 변를 할 수 있다는 사실을 유도했다. 다음 페이지에서 다룬다.

1905년 9월 논문 '$E=mc^2$'
Annalen der Physik, 18 (1905)

6월 논문 '특수 상대성 이론'의 중요한 결론의 하나로, 에너지와 질량은 같다는 것(**에너지와 질량의 등가성**)을 유도했다. 이 특집의 테마이다.

아인슈타인의 생애

※ 나이는 해당 연도의 생일 이후를 기준으로 한 것임.

1879년 (탄생)	3월 14일, 독일의 울름에서 태어났다.
1884년 (5세)	부친에게서 받은 방위 자석에 매료되어, 자연계의 구조에 흥미를 가지게 되었다.
1896년 (17세)	스위스 연방공과대학의 입학 자격을 얻어 스위스로 이주했다.
1900년 (21세)	스위스 연방공과대학을 졸업. 최초의 논문을 독일의 학술지 〈물리학 연보(Annalen der Physik)〉에 투고했다.
1902년 (23세)	베른 특허국에 취직.
1905년 (26세)	**'광양자 가설' '브라운 운동 이론' '특수 상대성 이론' '$E=mc^2$'** 등, 물리학사에 남는 5편의 논문을 연속 발표했다(기적의 해).
1906년 (27세)	취리히 대학에서 박사 학위를 받았다.
1907년 (28세)	'생애에서 가장 훌륭한 생각'이라는 **'등가 원리'**를 알아차렸다. 훗날 일반 상대성 원리를 완성하는 데 귀중한 아이디어가 된다.
1909년 (30세)	취리히 대학의 부교수로 일하기 시작했다.
1912년 (33세)	스위스 연방공과대학의 교수가 되었다.
1913년 (34세)	독일 베를린 대학의 교수가 되었다.
1916년 (37세)	중력을 '시공의 휘어짐'으로 설명하는 **'일반 상대성 이론'**를 발표. 우주의 구조를 결정하는 **'아인슈타인 방정식'**을 발표했다.
1917년 (38세)	우주론의 최초 논문을 썼다. '우주는 정적(靜的)'이라는 신념에서, 우주를 불변으로 유지하기 위해 **'우주항'을 아인슈타인 방정식에 도입했다.**
1919년 (40세)	**일반 상대성 이론이 예언한 '중력에 의한 빛의 휘어짐'이 개기 일식 관측을 통해 실증되었다.** 그는 단번에 유명 인사가 되었다.
1922년 (43세)	일본 방문. 배를 타고 일본으로 향하는 도중, **1921년도의 노벨 물리학상이 수여되었다**는 전보를 받았다(광양자 가설에 대해).
1927년 (48세)	덴마크의 물리학자 닐스 보어와, 양자 역학을 둘러싼 논쟁을 시작했다.
1931년 (52세)	1929년에 에드윈 허블이 우주 팽창의 증거를 발견했기 때문에 1917년에 도입한 우주항을 철회. **'생애 최대의 잘못'이라고 후회했다.**
1933년 (54세)	나치의 유대 인 탄압이 시작되어 독일을 떠남. 유럽 여행을 거쳐 미국에 가서, 프린스턴 고등연구소의 교수가 되었다.
1939년 (60세)	나치의 위협을 배경으로, 미국 대통령에게 원자폭탄 개발을 건의하는 서신의 서명자에 이름을 올렸다.
1945년 (66세)	(미국이 일본에 2발의 원자 폭탄을 투하. 제2차 세계 대전 종결).
1946년 (67세)	군축과 세계 정부의 수립을 UN 등에 호소하는 활동을 시작했다.
1954년 (75세)	마지막 논문을 집필(공저).
1955년 (76세)	4월, 철학자 러셀과 함께 핵무기 폐기를 호소하는 선언을 발표. 그 달 18일, 76세로 사망.

1905년 6월 논문 '특수 상대성 이론' ①

'광속 c는 절대로 변하지 않는다'는 것이 생각의 출발점

$E=mc^2$을 유도한 '상대성 이론'과 '광속도 불변의 원리'

아인슈타인이 $E=mc^2$을 발표한 논문(9월 논문)의 첫머리는 다음과 같다. "먼저 발표한 연구의 결과, 매우 흥미로운 결론을 얻게 되어 아래에 서술한다."

먼저 발표한 연구란 '특수 상대성 이론'(6월 논문)이다. 아인슈타인은 6월 논문에서 '쓸 것을 다 쓰지 않고 남겨둔 것'이 있다는 사실을 깨닫고 9월 논문에서 발표했다. 결국 **$E=mc^2$은 특수 상대성 이론의 '속편'인 셈이다.**

그러면 본편인 특수 상대성 이론은 어떠한 이론일까?

아인슈타인은 '단지 두 가지 원리'를 바탕으로 해서 시간과 공간에 관한 전혀 새로운 이론을 완성시켰다. 그것이 바로 특수 상대성 이론이다. 그때까지의 뉴턴 역학이나 전자기학에는 서로 맞지 않는 점이 있었다. 그 부분을 해결한 것이 특수 상대성 이론이다.

그 출발점이 된 첫째 원리는 **'상대성 원리'**이다. 즉 **'특별한 기준 등은 존재하지 않는다.'**는 원리이다. 아인슈타인은 정지한 사람이 보든 일정한 속도로 달리는 기차의 승객이 보든, 모든 물리 법칙은 같은 방식으로 이루어져 있다고 생각했다.

또 하나의 원리는 광속 c에 관한 것이다. 아인슈타인은 16세 무렵부터 '빛의 빠르기로 빛을 추격하면 어떻게 될까?'라는 점을 계속 생각하고 있었다. 시속 100km로 달리는 차를 시속 80km로 추격하면, 차는 시속 20km로 보인다. 이처럼 일반적으로 물체의 속도는 어떤 기준에 따라 변한다.

그러나 아인슈타인은 빛만은 예외라고 생각했다. **정지한 사람이 보든 일정한 속도로 달리는 기차의 승객이 보든, 광속 c는 언제나 일정하다**고 인정한 것이다. 이를 **'광속도 불변의 원리'**라고 한다.

이 두 원리를 성립시키면 시간과 공간에 대해서, 상식에 어긋나는 실로 기묘한 결론이 나온다. 예컨대 어떤 사람의 1초가, 다른 사람에게는 2초나 3초가 되기도 한다. '그렇다면 **시간과 공간은 관측하는 입장에 따라서 변한다**고 인정하자.'고 제안한 것이 특수 상대성 이론이다.

그리고 아인슈타인이 '다 쓰지 않고 남겨 둔 것'은 '필연적으로 에너지와 질량의 개념도 바뀌어야 한다.'는 내용이었다. 그것이 바로 $E=mc^2$이다.

※ 시간과 공간에 대해서는 Newton 2010년 7월호에서 특집으로 크게 다룰 예정임.

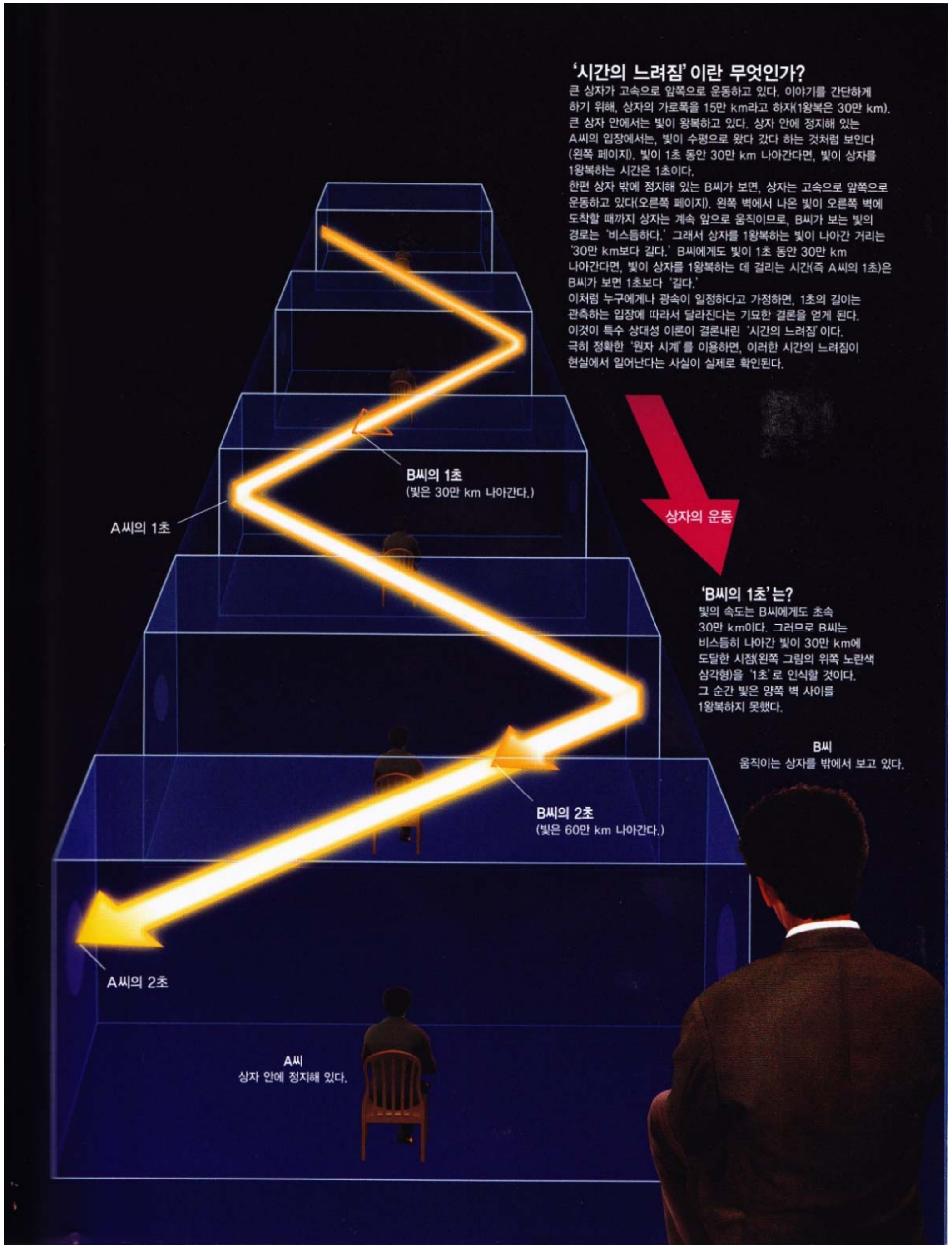
가로폭 15만 km의 상자(왕복 30만 km)

'시간의 느려짐' 이란 무엇인가?

큰 상자가 고속으로 앞쪽으로 운동하고 있다. 이야기를 간단하게 하기 위해, 상자의 가로폭을 15만 km라고 하자(1왕복은 30만 km). 큰 상자 안에서는 빛이 왕복하고 있다. 상자 안에 정지해 있는 A씨의 입장에서는, 빛이 수평으로 왔다 갔다 하는 것처럼 보인다(왼쪽 페이지). 빛이 1초 동안 30만 km 나아간다면, 빛이 상자를 1왕복하는 시간은 1초이다.

한편 상자 밖에 정지해 있는 B씨가 보면, 상자는 고속으로 앞쪽으로 운동하고 있다(오른쪽 페이지). 왼쪽 벽에서 나온 빛이 오른쪽 벽에 도착할 때까지 상자는 계속 앞으로 움직이므로, B씨가 보는 빛의 경로는 '비스듬하다.' 그래서 상자를 1왕복하는 빛이 나아간 거리는 '30만 km보다 길다.' B씨에게도 빛이 1초 동안 30만 km 나아간다면, 빛이 상자를 1왕복하는 데 걸리는 시간(즉 A씨의 1초)은 B씨가 보면 1초보다 '길다.'

이처럼 누구에게나 광속이 일정하다고 가정하면, 1초의 길이는 관측하는 입장에 따라서 달라진다는 기묘한 결론을 얻게 된다. 이것이 특수 상대성 이론이 결론내린 '시간의 느려짐'이다. 극히 정확한 '원자 시계'를 이용하면, 이러한 시간의 느려짐이 현실에서 일어난다는 사실이 실제로 확인된다.



'B씨의 1초'는?

빛의 속도는 B씨에게도 초속 30만 km이다. 그러므로 B씨는 비스듬히 나아간 빛이 30만 km에 도달한 시점(왼쪽 그림의 위쪽 노란색 삼각형)을 '1초'로 인식할 것이다. 그 순간 빛은 양쪽 벽 사이를 1왕복하지 못했다.

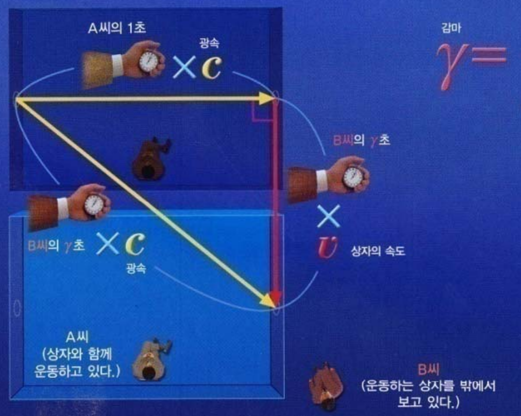
1905년 6월 논문 '특수 상대성 이론' ②

시간은 느려지고 공간은 줄어든다…, 그러면 '에너지'는?

$E=mc^2$의 길을 연 아인슈타인의 고찰

특수 상대성 이론은 '정지해 있는 사람의 입장에서는, 운동하는 물체의 시계는 느려진다.'는 실로 기묘한 결론을 내렸다.
뿐만 아니라 '정지해 있는 사람 입장에서는, 운동하는 물체의 길이가 줄어든다.'는 결론도 유도되었다. 아인슈타인은 **누구에게나 절대적이라고 생각되었던 시간이나 공간의 길이가, 입장에 따라서 늘어나거나 줄어든다**고 결론내린 것이다.
구체적으로 어느 정도나 늘어나거나 줄어들까? 초속 18만 km(광속의 0.6배)로 날아가는 로켓 안에 시계가 놓여 있다고 가정하자.
이 시계가 가리키는 1초는, 로켓 밖에서 정지한 사람이 보면, 1.25초로 '늘어나' 보인다(즉, 로켓 안의 시계가 느려진다).
그리고 로켓 안에 놓인 자가 나타내는 1m는, 로켓 밖에서 정지해 있는 사람이 보면 0.8m로 줄어들어 보인다.

상자의 운동을 위해서 본 그림



감마 계수의 식

감마

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

※ 감마 계수는, 아인슈타인 이전에 같은 모양의 식을(엄밀하게는 다른 목적으로) 유도하고 있었던 헨드릭 로렌츠를 기념해 '로렌츠 인자'라고도 한다.

피타고라스의 정리를 써서 '감마 계수'를 유도해 보자

계산을 간단하게 하기 위해 상자의 가로폭을 30만 km로 하자. A씨에게는, 왼쪽 벽에서 나온 빛이 오른쪽 벽에 도달하기까지의 시간이 1초이다. 따라서 그림의 삼각형의 가로 길이는, 속도 c인 빛이 'A씨의 1초'만큼 나아간 거리, 즉 $c\times1=c$로 쓸 수 있다.
그런데 상자를 밖에서 보는 B씨에게는, 왼쪽 벽에서 오른쪽 벽으로 향하는 빛은 비스듬히 달리므로, 그 궤적(위의 삼각형의 빗변)은 30만 km보다 길다. 삼각형의 빗변을 빛이 다 달렸을 때 마침내 A씨는 1초가 되었다고 인식한다. 그때 B씨의 시계는 '1초 보다 긴 시간'을 가리키고 있을 것이다. 이 '1초보다 긴 시간'을 γ초로 쓴다. 그러면, 삼각형의 빗변의 길이는 속도 c의 빛이 'B씨의 γ초'만큼 나아간 거리, 즉 $(\gamma\times c)$이다. 또 삼각형의 세로 길이는 속도 v의 상자가 'B씨의 γ초'만큼 나아간 거리이므로 $(\gamma\times v)$가 된다.
이 삼각형은 직각삼각형이므로, 가로 길이 c, 세로 길이 $(\gamma\times v)$, 빗변 길이 $(\gamma\times c)$에는 피타고라스의 정리가 성립된다.

$c^2+(\gamma\times v)^2=(\gamma\times c)^2$

γ를 c와 v로 나타내기 위해서는, $\gamma=\cdots$의 모양이 될 때까지 위의 식을 변형하면 된다.

괄호를 벗기면 $c^2+\gamma^2v^2=\gamma^2c^2$

γ^2을 포함하는 항을 정리하면 $\gamma^2(c^2-v^2)=c^2$

c^2으로 양변을 나누면 $\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=1$

양변의 양의 제곱근을 취하면 $\gamma\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=1$

$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$으로 양변을 나누면 $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ 이리하여 '시간의 느려짐'의 정도를 나타내는 γ(감마 계수)를 구할 수 있다.

예컨대 v가 초속 18만 km(광속의 60%)이면, $v=0.6c$로 해서 γ를 계산하면 된다. 계산하면

$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0.6c)^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-0.36}}=1.25$가 된다.

아인슈타인은 속도 v로 운동하는 사람의 1초가, 정지해 있는 사람이 보면 몇 초로 느려져 보일 것인가를 구하는 계산식을 유도했다.
그것이 바로 아래의 식이다.

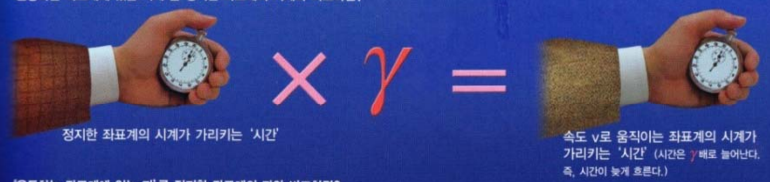
$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

'감마 계수'라고 불리는 이 식을 쓰면, 시간의 느려짐뿐만 아니라 길이가 얼마나 줄어드는지도 계산된다.
그런데 아인슈타인은 입장에 따라서 변하는 것은 시간이나 공간의 길이만이 아니라는 사실을 알게 되었다. **상대성 원리와 광속도 불변의 원리를 전제로 고찰하면, '(빛의) 에너지의 크기'도 입장에 따라 변해야 한다**고 아인슈타인은 결론을 내렸다. 그리고 앞의 감마 계수를 이용하면, 빛의 에너지가 보는 사람의 속도에 따라서 어느 정도 변하는지 계산된다는 점도 알았다.
이 고찰은 $E=mc^2$에 도달하는 데 매우 중요한 의미를 가지고 있었다. 아인슈타인은 여기까지의 결론을 정리해 6월 논문에 기록했다. 그리고 하나의 사고 실험(思考實驗)을 함으로써 마침내 $E=mc^2$에 도달하게 된다. 9월 논문에 기록된 그 사고 실험을 다음 페이지에서 소개한다.

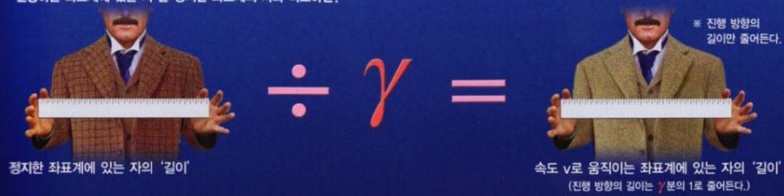
(빛의) 에너지의 변화는 '감마 계수'를 이용해 계산할 수 있다

감마 계수를 써서 계산할 수 있는 것은 시간의 느려짐만이 아니다. 속도 v로 운동하는 좌표계에 있는 '길이'나 '빛의 에너지'가, 정지한 좌표계에서 보면 어떻게 변하는가를 아래에 정리했다. 특히 속도 v에 따른 빛의 에너지 변화를 감마 계수를 이용해 계산할 수 있다는 점은, 이 다음에 보는 것처럼 아인슈타인이 $E=mc^2$을 유도할 때 중요한 단서가 되었다.

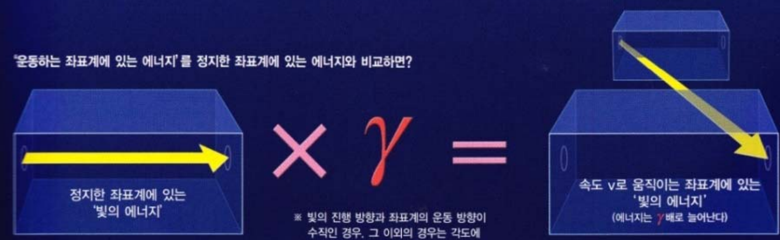
'운동하는 좌표계에 있는 시계'를 정지한 좌표계의 시계와 비교하면?



'운동하는 좌표계에 있는 자'를 정지한 좌표계의 자와 비교하면?



'운동하는 좌표계에 있는 에너지'를 정지한 좌표계에 있는 에너지와 비교하면?



※ 빛의 진행 방향과 좌표계의 운동 방향이 수직인 경우. 그 이외의 경우는 각도에 따른 복잡한 식이 된다.

1905년 9월 논문 'E=mc²' ①

'빛을 내보내는 물체'를 다른 시점에서 바라보면…?

$E=mc^2$을 유도한 아인슈타인의 사고 실험

아래의 내용은 아인슈타인이 $E=mc^2$을 유도한 사고 실험이다. 9월 논문에 쓰여 있는 오리지널 사고 실험을 간략하게 정리한 것인데 본질은 같다. 그림을 참조하면서 읽기 바란다.

---

1. 아주 큰 상자가 있는데, 그 안에 A씨가 정지해 있다. 상자 중앙에는 발광기가 있는데, 역시 정지해 있다. 어느 순간 발광기가 좌우를 향해 완전히 같은 세기의 빛(플래시)을 내보냈다.
2. **견해 A** : 총을 발사하면 반동이 일어나는 것처럼, 빛을 발사하는 데도 반동이 일어난다. 빛에 질량은 없지만 에너지는 있기 때문이다. 그러나 이 발광기는 정반대의 방향으로 같은 세기의 빛(에너지)을 동시에 발사했기 때문에 반동은 상쇄된다. 결국 **발광기는 빛을 발사한 후에도 계속 정지한다.**
3. 한편 B씨는 상자 밖에서 같은 현상을 보고 있다. B씨가 볼 때, 상자는 맹렬한 스피드로 앞쪽으로 등속도로 접근해 온다. 당연히 상자 안에 있는 발광기도 같은 속도로 접근한다. 그리고 발광기가 발사한 2개의 빛은 좌우로 퍼지면서, B씨를 향해 비스듬히 진행한다(그림 참조). 결국 발광기는 '그 진행 방향을 향해' 빛(에너지)을 발사한 셈이 된다.
4. **견해 B** : 진행 방향을 향해 빛(에너지)을 발사한 셈이므로, 그 반대 방향으로 반동이 있을 것이다. 이 반동은 발광기의 속도에 브레이크를 건다. 그러면 발광기가 접근해 오는 속도는 상자의 속도에 비해 느려지고, 결국 상자에 남게 될 것이다. **따라서 발광기는 빛을 발사함으로써, 상자 안에서 뒤로 움직이는 것으로 생각할 수밖에 없다.**
5. 그러나 A씨가 보는 발광기는 상자 안에서 정지해 있는(견해 A) 것이므로, B씨가 보는 발광기도 상자 안에서 정지해 있지 않으면 이상하다. **모순을 없애기 위해서는 어떠한 결론을 받아들일 필요가 있지 않을까?**

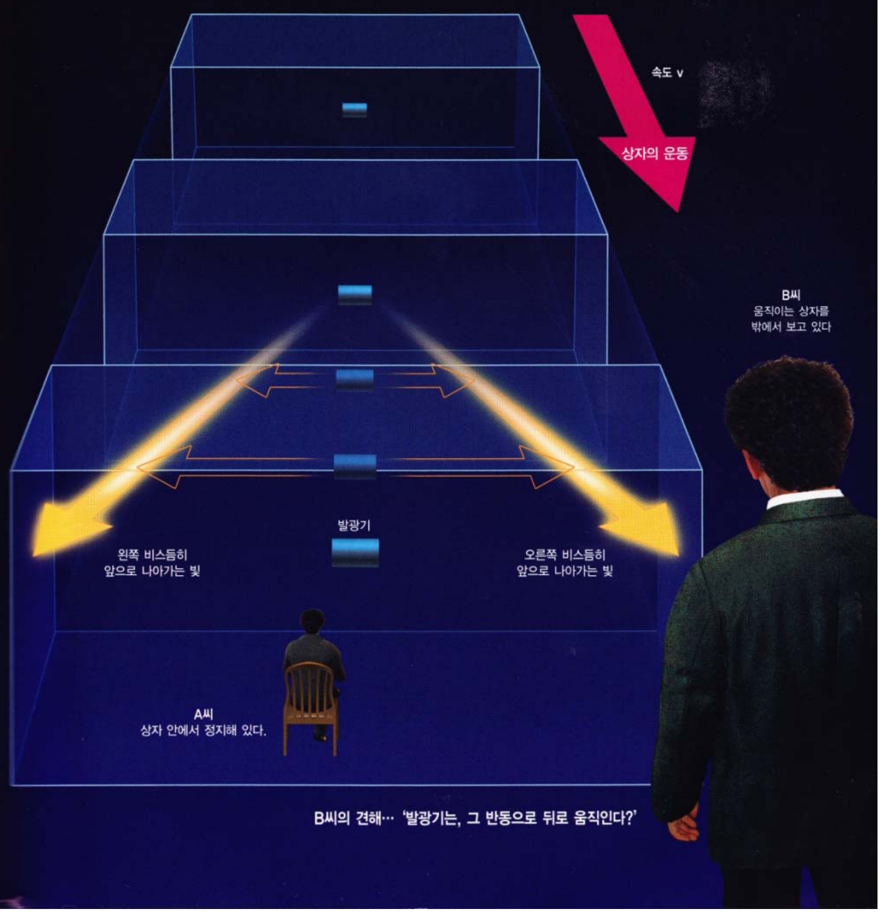
여기에서, 앞 페이지에서 말한 '에너지는 입장에 따라 변한다'는 특수 상대성 이론의 결론을 생각하기 바란다. 이 결론을 발판으로 해서, 아인슈타인은 위의 사고 실험에서 $E=mc^2$을 유도했다. 아인슈타인은 어떠한 고찰을 한 것일까? 다음 페이지에서 그 과정을 해설한다.

A씨의 견해… '발광기는 상자 안에서 계속 정지해 있다'

$E=mc^2$을 유도한 사고 실험

두 방향으로 빛을 발사하는 발광기를 생각할 때, 그것이 정지해 있는 것으로 보는 A씨의 견해(견해 A, 왼쪽 페이지의 그림)와, 발광기가 앞쪽을 향해 접근하고 있다고 보는 B씨의 견해(견해 B, 오른쪽 페이지의 그림)는 모순되는 것처럼 보인다. 대체 어디에 함정이 있을까?

(결론은 다음 페이지에)



B씨의 견해… '발광기는, 그 반동으로 뒤로 움직인다?'

1905년 9월 논문 ‘$E=mc^2$’ ②

아인슈타인은 이렇게 $E=mc^2$에 도달했다

너무나도 뜻밖의 결론에 처음에는 반신반의했다

사고 실험에서는 A씨와 B씨의 견해가 부딪친다. 상대성 원리와 광속도 불변의 원리를 포기하는 일 없이 앞뒤가 맞으려면, 다음의 결론을 받아들여야 한다는 점을 아인슈타인은 알게 되었다.

‘발광기는 빛(에너지)의 방출과 교환으로 질량, 즉 ‘움직이기 어려움’을 잃었다.’

빛을 방출하는 것에 따른 ‘감속’과, 질량(움직이기 어려움)을 잃는 것에 따른 ‘가속’이 균형을 이루면, B씨가 보아도 발광기는 상자 안에서 정지한 채로 있을 수 있다는 것이 설명된다. 그렇다면 A씨의 견해와 앞뒤가 맞는다. 아인슈타인은 이와 같은 고찰로부터, **그때까지의 물리학에서는 전혀 다른 개념이라고 생각되었던 ‘질량’과 ‘에너지’가 실은 같은 것이라는 점을 인정하자**고 제안한 것이다.

9월 논문에서는 발광기가 잃은 질량의 크기를 구하는 계산이 전개된다(오른쪽에서 자세히 해설). 아인슈타인은 이 논문에서 물체(발광체)가 방출하는 에너지를 L, 광속을 V로 해서,

‘물체가 잃은 질량은 $\frac{L}{V^2}$과 같다’

는 관계를 유도했다. ‘에너지 L의 빛을 방출함으로써 물체가 잃는 질량’을 m이라고 하면, 이 관계는

$$m=\frac{L}{V^2}$$

로 나타낼 수 있다. 몇 년 후, 아인슈타인은 에너지의 기호를 L에서 E, 광속을 V에서 c로 바꾸어

$$m=\frac{E}{c^2}$$

로 했다. 다시 아인슈타인은 분수를 쓰지 않고 E=…의 모양으로 고쳤다. 이리하여 이 관계식은

$$E=mc^2$$

이라는 극히 간결한 모습을 찾게 되었다.

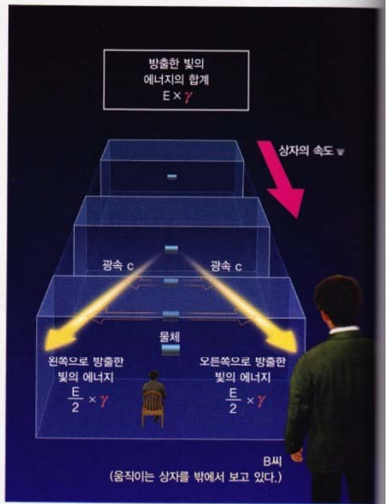
‘질량과 에너지는 같은 것’

너무나 의외의 결론에 아인슈타인 자신도 반신반의했던 모양이다. 그러나 아인슈타인은 훗날의 강연에서 자신 넘치는 말투로 이렇게 말했다.

“$E=mc^2$이라는 식은 극히 근소한 질량이 극히 큰 양의 에너지로 변환된다는 것, 또는 그 반대를 나타낸다. **이 식에 따르면, 질량과 에너지는 서로 같은 것이다.**”

상자 안에서 정지해 있는 A씨는 이렇게 본다

움직이는 상자를 상자 밖에서 관찰하는 A씨는 이렇게 본다



상대성 원리와 광속도 불변의 원리는 어디에 나타나는가

A씨가 보는 물체의 속성은 빛의 방출 전후에서 변하지 않는다(상자의 안에서 정지한 채). 따라서 ‘상대성 원리’에 의해 B씨가 보는 물체의 속도 … 빛의 방출 전후에서 변하지 않을 것이다. 또 ‘광속도 불변의 원리’에 의해 광속 c도 불변이다.
이 두 원리를 성립시키려고 하는 한, 오른쪽 계산에 나오는 v와 c는 … 가 되어, 마음대로 바꿀 수 없다. 따라서 ‘에너지의 방출’이 ‘질량의 손실’을 의미한다고 해석하지 않는 한, 물체의 운동 에너지의 변화를 설명할 수 없다.

자세히 알고 싶은 독자를 위한 해설

$E=mc^2$을 유도할 때까지의 계산 과정

아래의 내용은 1905년 9월 논문에 실린 $E=mc^2$의 도출 방법을 정리해서 간략하게 소개한 것이다. ‘물체’란 본문에서 말한 발광기를 말한다. 실제 논문에서는, 광속을 나타내는 기호는 c가 아니라 V, 에너지를 나타내는 기호는 E가 아니라 L로 되어 있다.

준비
- A씨가 보는 ‘왼쪽 방향으로 방출한 빛의 에너지’와 ‘오른쪽 방향으로 방출한 빛의 에너지’를 모두 $\frac{E}{2}$로 한다.
- 따라서 A씨가 보는 ‘물체가 방출한 빛의 에너지의 합계’ A씨 는, $\frac{E}{2}+\frac{E}{2}=E$이다.

단계 1 **A씨가 볼 때, ‘빛을 방출한 다음의 물체의 총 에너지’는 어떻게 나타낼 수 있는가?**

‘빛을 방출한 **후**의 물체의 총 에너지’ A씨 = ‘빛을 방출하기 **전**의 물체의 총 에너지’ A씨 − ‘물체가 방출한 빛의 에너지의 합계’ A씨
= ‘빛을 방출하기 **전**의 물체의 총 에너지’ A씨 − E

준비
- B씨가 보는 상자(및 물체)의 속도를 v로 한다. 속도 v에 대한 감마 계수를 $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$로 한다.
- B씨가 보는 ‘왼쪽 방향으로 방출한 빛의 에너지’와 ‘오른쪽 방향으로 방출한 빛의 에너지’는 모두 $\frac{E}{2}$가 아니라 $\frac{E}{2}\times\gamma$가 된다.
- 따라서 B씨가 보는 ‘물체가 방출한 빛의 에너지의 합계’ B씨 는 $(\frac{E}{2}\times\gamma)+(\frac{E}{2}\times\gamma)=E\times\gamma$이다.

단계 2 **B씨가 볼 때, ‘빛을 방출한 다음의 물체의 총 에너지’는 어떻게 나타낼 수 있는가?**

‘빛을 방출한 **후**의 물체의 총 에너지’ B씨 = ‘빛을 방출하기 **전**의 물체의 총 에너지’ B씨 − ‘물체가 방출한 빛의 에너지의 합계’ B씨
= ‘빛을 방출하기 **전**의 물체의 총 에너지’ B씨 − $E\times\gamma$

단계 3 **속도 v인 물체의 운동 에너지를 ‘두 사람이 보는 총 에너지의 차’로 구하면?**

① 빛을 방출하기 **전**의 물체의 속도 v의 운동 에너지 = ‘빛을 방출하기 **전**의 물체(속도 v)의 총 에너지’ − ‘빛을 방출하기 **전**의 물체(속도 0)의 총 에너지’
= ‘빛을 방출하기 **전**의 물체의 총 에너지’ B씨 − ‘빛을 방출하기 **전**의 물체의 총 에너지’ A씨

② 빛을 방출한 **후**의 물체의 속도 v의 운동 에너지 = ‘빛을 방출한 **후**의 물체(속도 v)의 총 에너지’ − ‘빛을 방출한 **후**의 물체(속도 0)의 총 에너지’
= ‘빛을 방출한 **후**의 물체의 총 에너지’ B씨 − ‘빛을 방출한 **후**의 물체의 총 에너지’ A씨
= (‘빛을 방출하기 **전**의 물체의 총 에너지’ B씨 − $E\times\gamma$) − (‘빛을 방출하기 **전**의 물체의 총 에너지’ A씨 − E)
= (‘빛을 방출하기 **전**의 물체의 총 에너지’ B씨 − ‘빛을 방출하기 **전**의 물체의 총 에너지’ A씨) − $(E\times\gamma-E)$
= ① − $(E\times\gamma-E)$

단계 4 **물체는 빛의 방출과 교환으로 운동 에너지를 얼마나 잃었을까?**

①에서 ②를 뺀 답을 구하면, ‘빛의 방출과 교환으로 잃어버린 운동 에너지’의 크기를 알 수 있다.

운동 에너지의 감소분 (① − ②) = $(E\times\gamma-E)=E(\gamma-1)$

여기에서 수학의 ‘급수 전개’라는 방법을 쓰면, γ를 다음처럼 근사시킬 수 있다.

$$E(\gamma-1)=E\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)\fallingdotseq E\left\{\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{v^2}{c^2}\right)-1\right\}=E\times\frac{1}{2}\times\frac{v^2}{c^2}=\frac{1}{2}\times\frac{E}{c^2}\times v^2 \cdots\cdots ③$$

③을 보면, 질량 m인 물체가 속도 v로 운동할 때의 운동 에너지 즉 $\frac{1}{2}mv^2$ …… ④와 같은 모양을 하고 있음을 알 수 있다.

즉, 에너지 E인 빛을 방출하면, 물체의 운동 에너지에는 질량 $\frac{E}{c^2}$를 잃는 것과 같은 변화가 일어난다. 요컨대 물체에서 ‘에너지 E의 빛’을 잃는 것과 ‘질량 $\frac{E}{c^2}$’를 잃는 것은 전적으로 같은 것이 된다.

결론 : 잃어버린 질량을 m으로 표시하면, $m=\frac{E}{c^2}$가 유도된다. 이것을 분수를 쓰지 않는 모양으로 변형하면 $E=mc^2$이 된다.

발전 **운동 에너지 ‘$E=\frac{1}{2}mv^2$’과 ‘$E=mc^2$’의 관계는?**

mc^2은 질량 m인 물체가 정지해 있을 때의 에너지이다. 속도 v로 움직이는 물체의 총 에너지는 감마 계수를 쓰면 $mc^2\times\gamma$가 된다.

이때 마찬가지로 급수 전개를 써서 근사시키면 $mc^2\times\gamma=mc^2\times\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\fallingdotseq mc^2\times\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{v^2}{c^2}\right)=mc^2+\frac{1}{2}mv^2$이 된다.

즉, 속도 v로 움직이는 물체는 정지해 있을 때의 에너지 mc^2과, 운동 에너지인 $\frac{1}{2}mv^2$ 양쪽을 모두 가지고 있다는 것이 확인된다.

❑ Frames of reference

- The coordinate system in which you observe events

- e.g. The room around you

- You judge how fast a thrown ball goes by its velocity relative to some stationary object in the room

- You judge how fast you are moving by looking at objects around you

❑ Einstein's principle of relativity

- Principle of relativity
  - All the laws of physics are identical in all inertial reference frames.
- Constancy of speed of light
  - Speed of light is same in all inertial frames
    (e.g. independent of velocity of observer, velocity of source emitting light)

These two postulates are the basis of the
special theory of relativity !

❑아인슈타인의 가설

가정 1 : 모든 관성계에서의 물리 법칙은 동일하다.
(상대성 원리)

가정 2 : 모든 관성계에서의 빛의 속력은 일정하다.
(광속불변의 원리)

'광속도 불변의 원리'는 특수 상대성 이론의 토대

아인슈타인의 착상의 원점은 전자기학에 있다

앞 페이지에서 본 것처럼 '자연계의 최고 속도=광속'이다. 그래서 '자연계의 최고 속도는 누가 보아도 같다.'는 것은 **'광속은 누가 보아도 같다.'**는 뜻이다. 이것을 **'광속도 불변의 원리'**라고 하며, 아인슈타인은 이 원리를 주체로 해서 상대성 이론을 구축했다. 그러면 왜 아인슈타인은 '광속은 누가 보아도 같다.'고 생각했을까? 그 착상의 토대는 제임스 맥스웰(1831~1879)의 '전자기학'에 있었다.

철심에 도선을 감고 '전기'를 통하면 전자석이 되는, 즉 '자기(자기력선)'가 생기는 실험은 학교에서도 흔히 한다(**1**). 자기란 자기력을 일으키는 것이다. 맥스웰의 전자기학은 이와 같은 전기와 자기의 관계성을 정리한 물리학이다.

맥스웰은 전자기학에 근거해 '전자기파'의 존재를 예언하고 빛도 전자기파의 일종이라고 생각했다. 그리고 전자기파의 속도는 전자기학에 근거한 '계산에 의해' 초속 약 30만 km가 된다는 사실도 알게 되었다(2). 예를 들면 방전(공기 중 등에 순간적으로 전류가 흐르는 현상)이 일어나면 전자기파가 발생한다. **전자기파란 전기나 자기에서 발생하는 파동이다.** 1888년에는 맥스웰의 예언대로, 방전에 의해 전자기파가 발생한다는 사실이 실험으로 확인되었다(**3**).

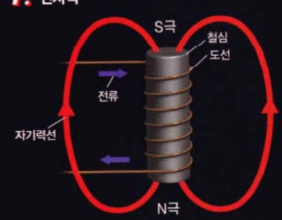
계산으로 유도된 '광속'은 무엇을 기준으로 삼은 속도인가?

맥스웰의 전자기학에서는 전자기파의 속도, 즉 광속의 수치가 계산에 의해 '갑자기' 나왔는데, 그것이 '무엇을 기준으로 삼은 속도'인지 수식은 알려주지 않았다. 그래서 상대성 이론이 등장하기 전까지 이 광속의 수치는 '절대 공간에 대한 속도'*라고 생각되었다.

그러나 아인슈타인은 26쪽에서도 말한 것처럼 절대 공간이라는 생각을 부정했다. '속도의 기준을 생각하지 않아도 전자기학의 계산으로부터 광속의 수치가 자연적으로 나오므로, 광속의 수치는 속도의 기준과 관계가 없을 것이다. 요컨대 광속은 어떤 기준으로 보아도(어떠한 속도로 운동하는 사람이 보아도) 같다'. 아인슈타인은 이렇게 생각했다. 광속도 불변의 원리는 현재까지 다양한 실험을 통해 실증되었다(**4**).

※ : 파동에는 일반적으로 파동을 전하는 물질인 '매질'이 있다. 예를 들면 음파의 매질은 공기, 수면파의 매질은 물이다. 당시는 빛(전자기파)을 전하는 매질로서, 절대 공간에 대해 정지해 있는 '에테르'라는 가상적인 물질이 생각되었다.
그러나 상대성 이론의 등장으로 절대 공간이 부정됨과 동시에 에테르의 존재도 부정되었다.
현재는 빛(전자기파)은 매질이 불필요한 파동이라는 사실이 알려져 있다.

1. 전자석



전자기파의 파동 방정식(진공 중의 경우)

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}\left(\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}\left(\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2}\right)$$

→

광속(전자기파의 속도)

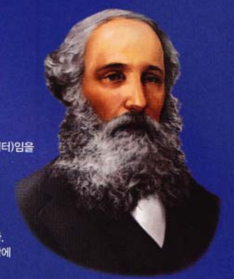
$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

= 초속 약 30만 km

※ $\vec{E}$는 전기 마당(전기장), $\vec{B}$는 자속 밀도(磁束密度)라 불리는 것이다[알파벳 위의 화살표는 크기와 방향을 가진 양(벡터)임을 나타낸다]. ε_0은 전기에 관계되는 상수인데 '진공 중의 유전율(誘電率)', μ_0은 자기에 관계되는 상수인데 '진공 중의 투자율(透磁率)'이라고 불린다.

2. 광속의 수치는 전자기학에서 계산으로 구해졌다

왼쪽 위의 식은 전자기파의 파동 방정식이라 불리는 것인데, 전자기파가 어떻게 진동해서 나아가는가를 가르쳐 준다. 어려운 수준의 수학이 필요하므로 여기에서는 식의 자세한 의미에 대해서는 설명하지 않는다. 중요한 것은 전자기학에 근거한 계산에 의해(왼쪽 위의 파동 방정식에서) 광속(전자기파의 진행 속도)의 수치를 구할 수 있다(오른쪽 위)는 사실이다.



제임스 맥스웰

3. 방전에 의한 전파 발생 실험(헤르츠의 실험)

독일의 하인리히 헤르츠(1857~1894)는 방전 실험에 의해 실제로 전자기파(전파)가 발생한다는 사실을 실증하고 맥스웰의 이론을 뒷받침했다.
수면에 돌을 던져서 발생한 파동이 먼 수면에 떨어진 낙엽을 흔드는 것처럼, 방전에 의해 발생한 전자기파가 떨어져 있는 수신 안테나에 전달되어 작은 방전이 일어나는 일(안테나 안의 전자를 움직이는 일)이 확인되었다. 전자기파란 전기를 띤 것(여기에서는 전자)을 움직이는 파동이라고 할 수 있다. 덧붙여서 말하면 자연계의 방전 현상인 벼락에서도 전자기파가 발생한다.

4. 광속도 불변의 원리의 실증 실험

지구는 태양 주위를 공전하고 있다. 지구의 운동 방향과 같은 방향으로 나아가는 빛의 속도는, 상대성 이론 등장 전의 '보통의 속도의 덧셈'(27쪽 아래)으로 생각하면 지구의 속도만큼 더해져서 빨리질 것으로 생각된다. 그러나 실제로 빛의 진행 방향을 지구의 운동 방향과 일치시킨 경우와 그렇지 않은 경우를 비교해도 빛의 속도에는 변화가 없다.
이와 같은 실험은 상대성 이론 탄생 전인 1887년에 앨버트 마이컬슨과 에드워드 몰리에 의해 실시되었다. 같은 종류의 실험은 그 후에도 계속 실시되었는데, 광속의 변화는 검출되지 않았다.

어느 방향으로 나아가는 빛의 속도든 모두 같다

지구는 태양 주위를 공전하는 등, 우주 공간에서 움직이고 있다.

❑ Consequences of Einstein’s relativity

- Events simultaneous for observer in one reference frame no necessarily simultaneous in different reference frames.

- The distance between two objects is not absolute. Different for observers in different reference frames.

- The time interval between events is not absolute. Different for observers in different inertial frames.

❑ Lorentz Transformation

- Named after the Dutch Physcist **Hendrik Lorentz**, describes how, according to the theory of special relativity, two observers' varying measurements of space and time can be converted into each other's frames of reference

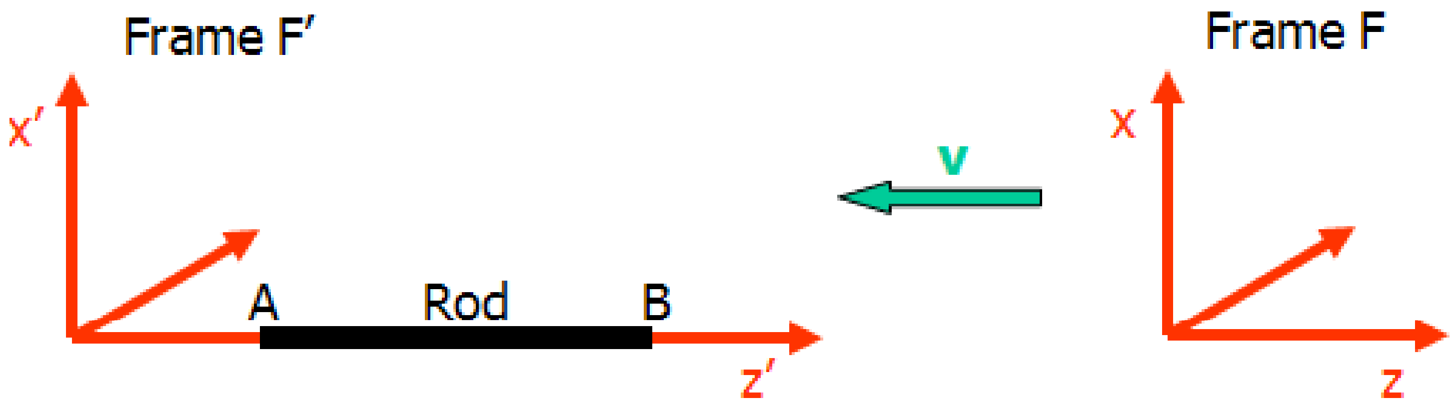
$$x' = x$$

$$y' = y$$

$$z' = \gamma\left(z + vt\right)$$

$$t' = \gamma\left(t + \frac{v}{c^2}z\right)$$

❑ Length contraction



Rod AB of length L' fixed in F' at x'_A, x'_B. What is its length measured in F?

Must measure positions of ends in F at the same time, so events in F are (t,x_A) and (t,x_B). From Lorentz:

$$z'_A = \gamma(z_A + vt) \qquad z'_B = \gamma(z_B + vt)$$

$$L' = z'_B - z'_A = \gamma(z_B - z_A) = \gamma L > L$$

Moving objects appear contracted in the direction of the motion

- Clock in frame F at point with coordinates (x,y,z) at different times t_A and t_B

- In frame F' moving with speed v, Lorentz transformation gives

$$t'_A = \gamma\left(t_A + \frac{vz}{c^2}\right) \qquad t'_B = \gamma\left(t_B + \frac{vz}{c^2}\right)$$

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \gamma\left(t_B - t_A\right) = \gamma \Delta t > \Delta t$$

- So

Moving clocks appear to run slow

시간의 느려짐을 '실제 체험'하는 소립자

지상에 쏟아지는 소립자 '뮤온'은 수명이 늘어난다

앞 페이지에서는 우주선이 광속의 99%로 날아간다는 비현실적인 설정을 생각했다. 이번에는 상대성 이론에 의해 '실제로' 시간이 느려지는 효과로 '수명'이 늘어나는 사례를 소개한다. 바로 우주에서 오는 방사선의 일종인 '뮤온(뮤 입자)'이다(1).

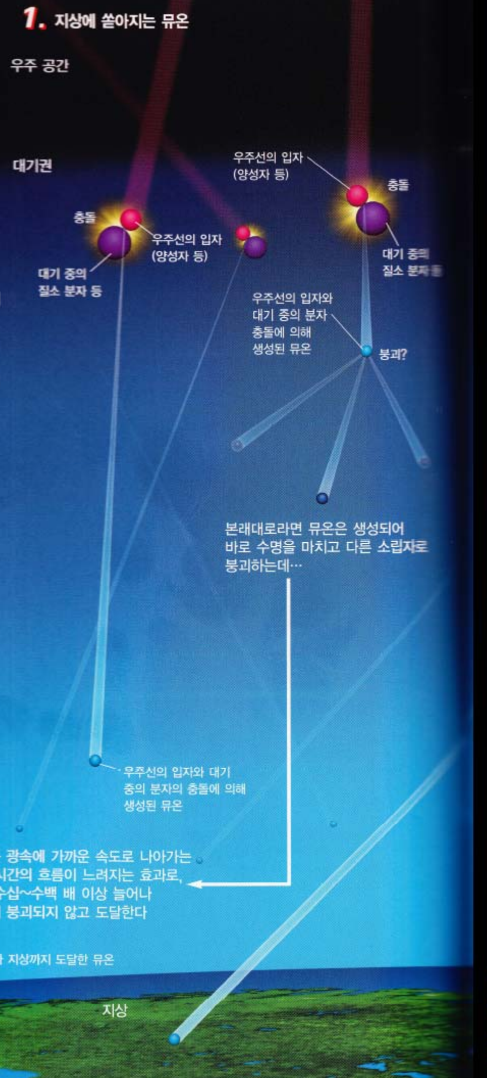
우주에서는 항상 '우주선(宇宙線)'이라 불리는 방사선(주로 광속에 가까운 빠르기로 달리는 양성자. 양성자는 원자핵 구성 요소의 하나)이 쏟아지고 있다. 우주선의 입자는 지구 대기의 분자와 충돌해서 다양한 '2차 우주선'을 발생시킨다. 뮤온은 2차 우주선에 포함되는, 음전하를 가진 매우 가벼운(질량이 작은) 입자다※.

본래의 수명이라면 뮤온은 지상에 도달하지 못한다

지상 실험(정지한 상태)에서 뮤온의 수명은 100만분의 2.2초 정도밖에 되지 않는다. 100만분의 2.2초의 시간이 지나면 뮤온은 '부서져서(붕괴)' 다른 3개의 소립자가 생성된다. 뮤온은 광속에 가까운 속도로 지상을 향해 나아가는데, 이 수명이라면 겨우 1km 미만밖에 나아가지 못한다. 그러나 실제로는 수백~십수 km 상공에서 생성된 뮤온이 빗발치듯 항상 지상에 쏟아진다는 사실이 확인되어 있다(오른쪽 페이지 아래의 '뮤온을 보는 방법' 참조). 이것은 뮤온에서 시간의 흐름이 느려져, 지상에 정지해 있는 우리가 보면 뮤온의 수명이 늘어나기 때문이다.

※ : 뮤온은 음전하를 가진 '전자'를 닮은 입자이다. 뮤온의 질량은 약 1.9×10^{-28}kg이다. 일상적인 감각으로 보면 매우 작지만, 전자에 비하면 약 207배나 되는 '무거운 전자'라고도 할 수 있다.

1. 지상에 쏟아지는 뮤온

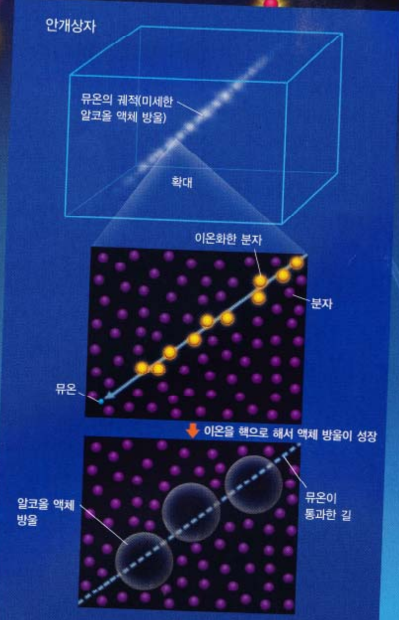


※ : 2차 우주선이 발생하는 반응은 실제로는 더욱 복잡한데, 여기에서는 간략하게 나타냈다.

*** 좀 더 자세히! 물체는 광속 이상으로는 달리지 못한다**

광속은 자연계의 최고 속도이므로, 질량을 가진 물체의 속도가 광속을 넘을 수는 없다. 이 페이지에서 소개한 뮤온도 질량을 가지므로 광속을 넘을 수는 없다. 또 물체의 속노는 광속에 한없이 접근해도(예컨대 광속의 99.9999%), 결코 광속(광속의 100%)으로 달릴 수는 없다.

광속에 접근하면 할수록 물체를 가속시키려 해도 그 '효율'이 떨어져, 아무리 에너지를 투입해도[우주선(宇宙船)이라면 아무리 엔진의 출력을 올려도] 광속에 도달하거나 광속을 넘을 수는 없다. 상대성 이론에 따르면, 광속에 접근할수록 물체의 무게(엄밀하게는 질량)가 계속 커져서 가속하기 어려워진다.



뮤온을 '보는' 방법

뮤온은 눈에 보이지 않지만 '안개상자'라는 장치를 쓰면 그 흔적을 포착할 수 있다. 안개상자 안에 기체 알코올을 가득 채운다(적은 자극으로 알코올이 액화하는 '과포화 상태').

여기에 뮤온이 날아오면, 공기 분자나 알코올 분자와 충돌해 분자가 전기를 띤 이온 상태가 된다. 그러면 알코올 분자가 이온을 핵으로 해서 모이고, 작은 액체 방울을 만든다. 이것이 하얀 비행기구름 같은 궤적이 되어 보이는 것이다.

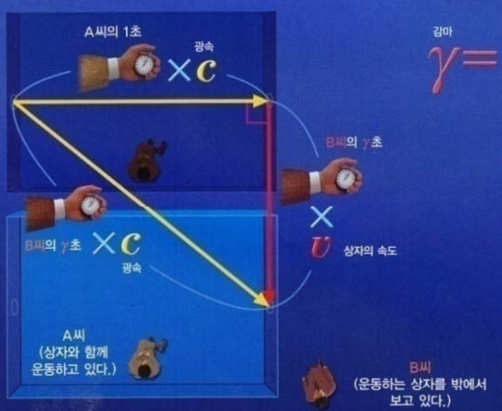
안개상자는 뮤온뿐만 아니라 일반적인 방사선을 검출하는 장치인데, 흰 궤적의 길이나 형상에 의해 방사선의 종류를 구분할 수 있다. 뮤온은 기다란 직선 궤적을 만든다.

시간은 느려지고 공간은 줄어든다…, 그러면 '에너지'는?

$E=mc^2$의 길을 연 아인슈타인의 고찰

특수 상대성 이론은 '정지해 있는 사람의 입장에서는, 운동하는 물체의 시계는 느려진다.'는 실로 기묘한 결론을 내렸다.
뿐만 아니라 '정지해 있는 사람 입장에서는, 운동하는 물체의 길이가 줄어든다.'는 결론도 유도되었다. 아인슈타인은 **누구에게나 절대적이라고 생각되었던 시간이나 공간의 길이가, 입장에 따라서 늘어나거나 줄어든다**고 결론내린 것이다.
구체적으로 어느 정도나 늘어나거나 줄어들까? 초속 18만 km(광속의 0.6배)로 날아가는 로켓 안에 시계가 놓여 있다고 가정하자.
이 시계가 가리키는 1초는, 로켓 밖에서 정지한 사람이 보면, 1.25초로 '늘어나' 보인다(즉, 로켓 안의 시계가 느려진다).
그리고 로켓 안에 놓인 자가 나타내는 1m는, 로켓 밖에서 정지해 있는 사람이 보면 0.8m로 줄어들어 보인다.

상자의 운동을 위해서 본 그림



감마 계수의 식

감마

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

※ 감마 계수는, 아인슈타인 이전에 같은 모양의 식을(엄밀하게는 다른 목적으로) 유도하고 있었던 헨드릭 로렌츠를 기념해 '로렌츠 인자'라고도 한다.

피타고라스의 정리를 써서 '감마 계수'를 유도해 보자

계산을 간단하게 하기 위해 상자의 가로폭을 30만 km로 하자. A씨에게는, 왼쪽 벽에서 나온 빛이 오른쪽 벽에 도달하기까지의 시간이 1초이다. 따라서 그림의 삼각형의 가로 길이는, 속도 c인 빛이 'A씨의 1초'만큼 나아간 거리, 즉 $c\times1=c$로 쓸 수 있다.
그런데 상자를 밖에서 보는 B씨에게는, 왼쪽 벽에서 오른쪽 벽으로 향하는 빛은 비스듬히 달리므로, 그 궤적(위의 삼각형의 빗변)은 30만 km보다 길다. 삼각형의 빗변을 빛이 다 달렸을 때 마침내 A씨는 1초가 되었다고 인식한다. 그때 B씨의 시계는 '1초 보다 긴 시간'을 가리키고 있을 것이다. 이 '1초보다 긴 시간'을 γ초로 쓴다. 그러면, 삼각형의 빗변의 길이는 속도 c의 빛이 'B씨의 γ초'만큼 나아간 거리, 즉 $(\gamma\times c)$이다. 또 삼각형의 세로 길이는 속도 v의 상자가 'B씨의 γ초'만큼 나아간 거리이므로 $(\gamma\times v)$가 된다.
이 삼각형은 직각삼각형이므로, 가로 길이 c, 세로 길이 $(\gamma\times v)$, 빗변 길이 $(\gamma\times c)$에는 피타고라스의 정리가 성립된다.

$c^2+(\gamma\times v)^2=(\gamma\times c)^2$

γ를 c와 v로 나타내기 위해서는, $\gamma=\cdots$의 모양이 될 때까지 위의 식을 변형하면 된다.

괄호를 벗기면 $c^2+\gamma^2v^2=\gamma^2c^2$

γ^2을 포함하는 항을 정리하면 $\gamma^2(c^2-v^2)=c^2$

c^2으로 양변을 나누면 $\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=1$

양변의 양의 제곱근을 취하면 $\gamma\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=1$

$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$으로 양변을 나누면 $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ 이리하여 '시간의 느려짐'의 정도를 나타내는 γ(감마 계수)를 구할 수 있다.

예컨대 v가 초속 18만 km(광속의 60%)이면, $v=0.6c$로 해서 γ를 계산하면 된다. 계산하면

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0.6c)^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-0.36}}=1.25$$가 된다.

아인슈타인은 속도 v로 운동하는 사람의 1초가, 정지해 있는 사람이 보면 몇 초로 느려져 보일 것인가를 구하는 계산식을 유도했다.
그것이 바로 아래의 식이다.

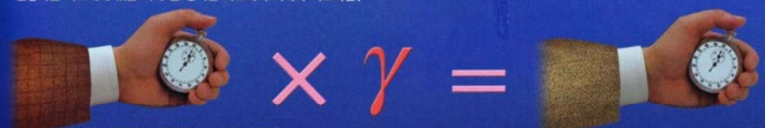
$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

'감마 계수'라고 불리는 이 식을 쓰면, 시간의 느려짐뿐만 아니라 길이가 얼마나 줄어드는지도 계산된다.
그런데 아인슈타인은 입장에 따라서 변하는 것은 시간이나 공간의 길이만이 아니라는 사실을 알게 되었다. **상대성 원리와 광속도 불변의 원리를 전제로 고찰하면, '(빛의) 에너지의 크기'도 입장에 따라 변해야 한다**고 아인슈타인은 결론을 내렸다. 그리고 앞의 감마 계수를 이용하면, 빛의 에너지가 보는 사람의 속도에 따라서 어느 정도 변하는지 계산된다는 점도 알았다.
이 고찰은 $E=mc^2$에 도달하는 데 매우 중요한 의미를 가지고 있었다. 아인슈타인은 여기까지의 결론을 정리해 6월 논문에 기록했다. 그리고 하나의 사고 실험(思考實驗)을 함으로써 마침내 $E=mc^2$에 도달하게 된다. 9월 논문에 기록된 그 사고 실험을 다음 페이지에서 소개한다.

(빛의) 에너지의 변화는 '감마 계수'를 이용해 계산할 수 있다

감마 계수를 써서 계산할 수 있는 것은 시간의 느려짐만이 아니다. 속도 v로 운동하는 좌표계에 있는 '길이'나 '빛의 에너지'가, 정지한 좌표계에서 보면 어떻게 변하는가를 아래에 정리했다. 특히 속도 v에 따른 빛의 에너지 변화를 감마 계수를 이용해 계산할 수 있다는 점은, 이 다음에 보는 것처럼 아인슈타인이 $E=mc^2$을 유도할 때 중요한 단서가 되었다.

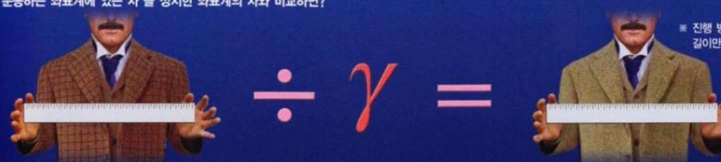
'운동하는 좌표계에 있는 시계'를 정지한 좌표계의 시계와 비교하면?



정지한 좌표계의 시계가 가리키는 '시간'

속도 v로 움직이는 좌표계의 시계가 가리키는 '시간' (시간은 γ배로 늘어난다. 즉, 시간이 늦게 흐른다.)

'운동하는 좌표계에 있는 자'를 정지한 좌표계의 자와 비교하면?

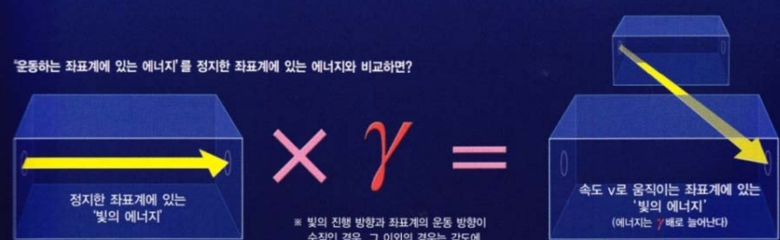


※ 진행 방향의 길이만 줄어든다.

정지한 좌표계에 있는 자의 '길이'

속도 v로 움직이는 좌표계에 있는 자의 '길이' (진행 방향의 길이는 γ분의 1로 줄어든다.)

'운동하는 좌표계에 있는 에너지'를 정지한 좌표계에 있는 에너지와 비교하면?



※ 빛의 진행 방향과 좌표계의 운동 방향이 수직인 경우. 그 이외의 경우는 각도에 따른 복잡한 식이 된다.

❑ Space-time

- Unlike classical physics, Einstein realized that space and time were intertwined with the laws of physics, not just an absolute grid on which the laws were laid.

- It helps to stop thinking in terms of 3D space alone and adding the 4th dimension of time. Time is just treated as an additional dimension much like space.

민코프스키의 시공 다이어그램으로 보는 4차원 시공

'빛의 속도'는 항상 일정하다. 그래서 특수 상대성 이론은 '빛의 속도'만을 절대적인 기준으로 한다. **독일의 수학자 헤르만 민코프스키는 빛의 속도를 기준으로 한 시공 다이어그램을 그렸다. 이것을 '민코프스키 다이어그램'이라 한다.** 민코프스키는 아인슈타인이 스위스 연방 공과대학에 다닐 때 수학 교수였던 인물이다.

민코프스키의 다이어그램에서는 시간축의 한 눈금이 1년이라면, 공간축의 한 눈금을 1광년(빛이 1년 동안 나아간 거리)으로 정한다. 이때 시간축과 공간축의 눈금 간격은 같다.

예컨대 우주에 있는 천체에서 나온 빛을 생각하자. 광속은 일정(초속 약 30만 km)하므로 빛은 1초 뒤에는 반지름 30만 km, 2초 뒤에는 반지름 약 60만 km인 원둘레에 이른다. 이것을 민코프스키 다이어그램에 적용시키면 그림과 같이 된다. 빛이 나아가는 궤적은 기울기 45°의 원뿔로 표현된다. 이 원뿔을 '빛원뿔[광원추(光圓錐)]'이라 한다.

모든 운동은 광속을 넘을 수 없다. 어떤 정보가 광속을 넘어 두 점 사이에 전해질 수도 없다. 그래서 '현재(다이어그램의 원점)에 영향을 미치는 과거에 일어난 일'과, '현재가 영향을 미치는 미래에 일어날 일'은 모두 빛원뿔의 내부에 자리잡는다.

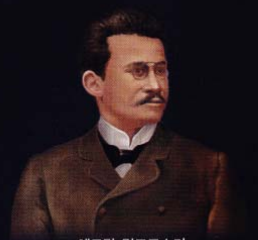
예컨대 원점에 지구가 있고, 5만 광년 떨어진 천체에서 초신성 폭발이 일어났다고 하자. 그 경우 5만 년 전에 일어난 현상의 정보가 '현재'의 지구에 이르는 셈이다. 그 천체가 지금 현재(즉 시공 다이어그램 안에서는 원점과 같은 평면상) 어떻게 되어 있는지는 알 도리가 없다. 반대로 그 천체를 향해 지구에서 어떤 광신호를 보냈다고 해도, '현재'의 그 천체에 광신호가 도달하지는 못한다.

민코프스키의 시공 다이어그램으로 보는 4차원 시공

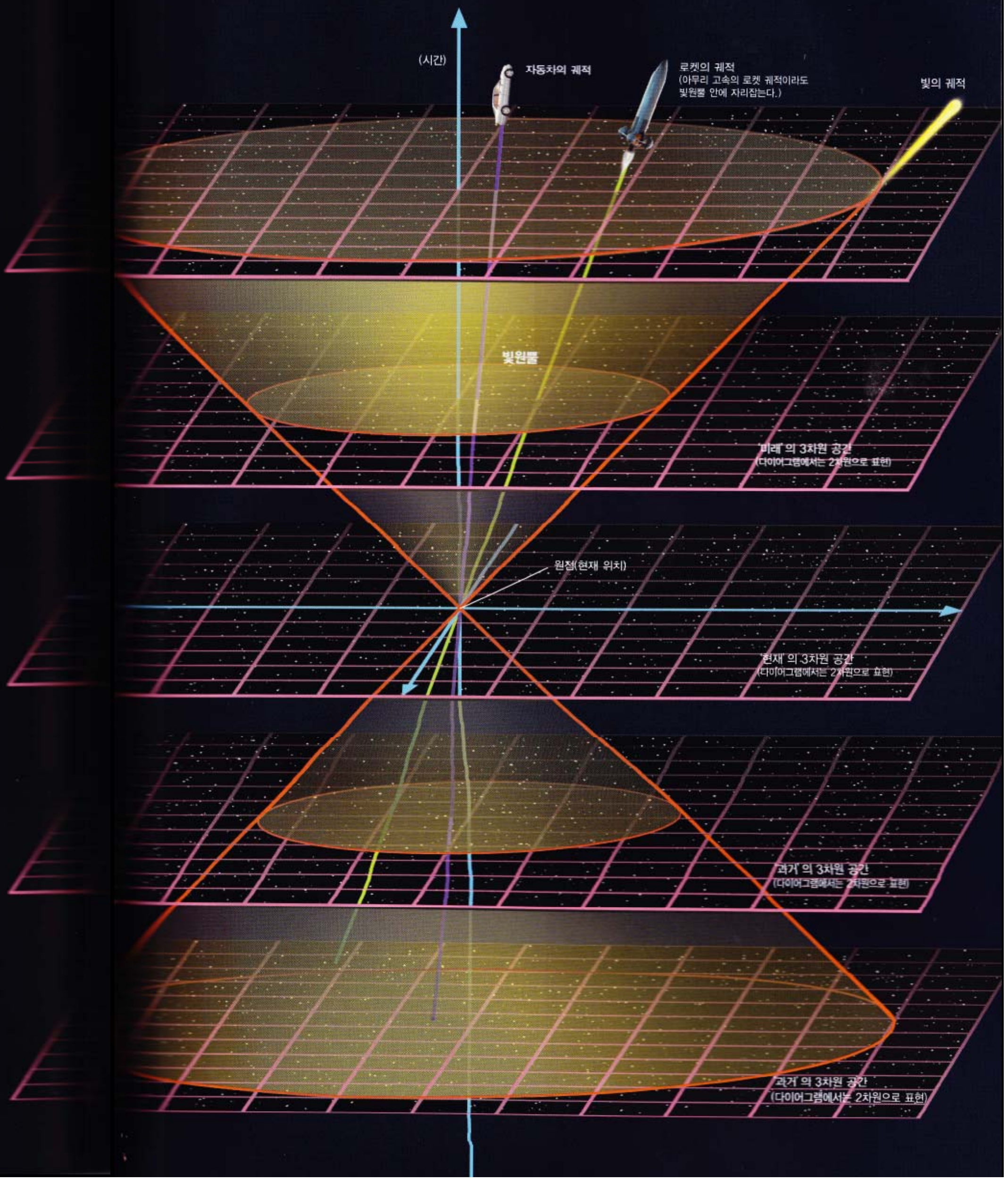
특수 상대성 이론은 '빛의 속도'만을 절대적인 기준으로 한다. 독일의 수학자 헤르만 민코프스키는 빛의 속도를 기준으로 한 시공 다이어그램을 그렸다. 이것을 '민코프스키 다이어그램'이라 한다. 민코프스키의 다이어그램에서는 시간축의 한 눈금이 1년이라면, 공간축의 한 눈금을 1광년(빛이 1년 동안 나아간 거리)으로 정한다. 그 결과, 빛이 나아가는 궤적은 기울기 45°의 원뿔로 표현된다. 이 원뿔을 '빛원뿔'이라 한다.

모든 운동은 광속을 넘을 수 없다. 그래서 '현재(다이어그램의 원점)에 영향을 미치는 과거에 일어난 일'과, '현재가 영향을 미치는 미래에 일어날 일'은 모두 빛원뿔의 내부에 자리 잡는다.

그림 속의 자동차와 로켓 궤적의 기울기는 과장되어 있다. 빛 궤적의 기울기를 45°라고 할 때 자동차와 로켓의 궤적은 거의 수직에 가까워진다. 자동차와 로켓의 속도는 빛에 비하면 정지한 것과 큰 차이가 없을 정도로 느리기 때문이다.



헤르만 민코프스키
(1864~1909)



더 알고 싶다!

칼럼

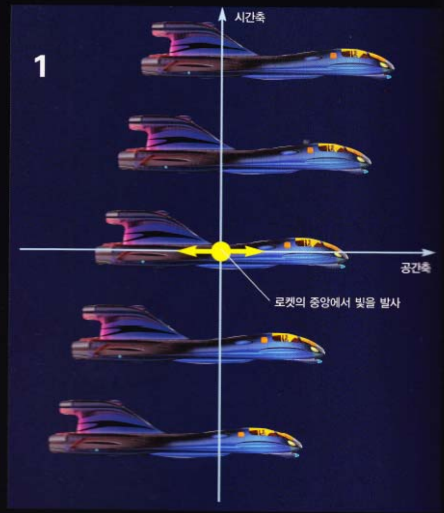
특수 상대성 이론이란?

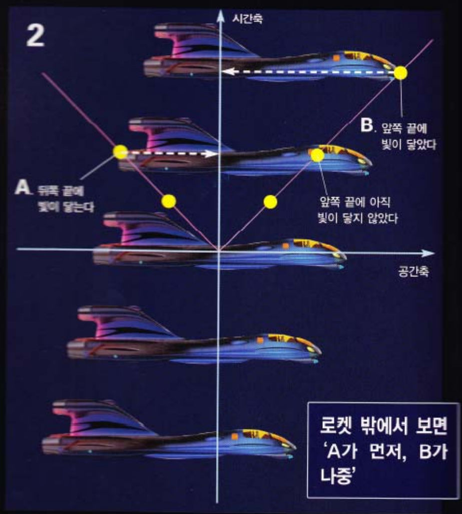
여기에서 특수 상대성 이론에 대해 2차원 시공 다이어그램으로 살펴보자.

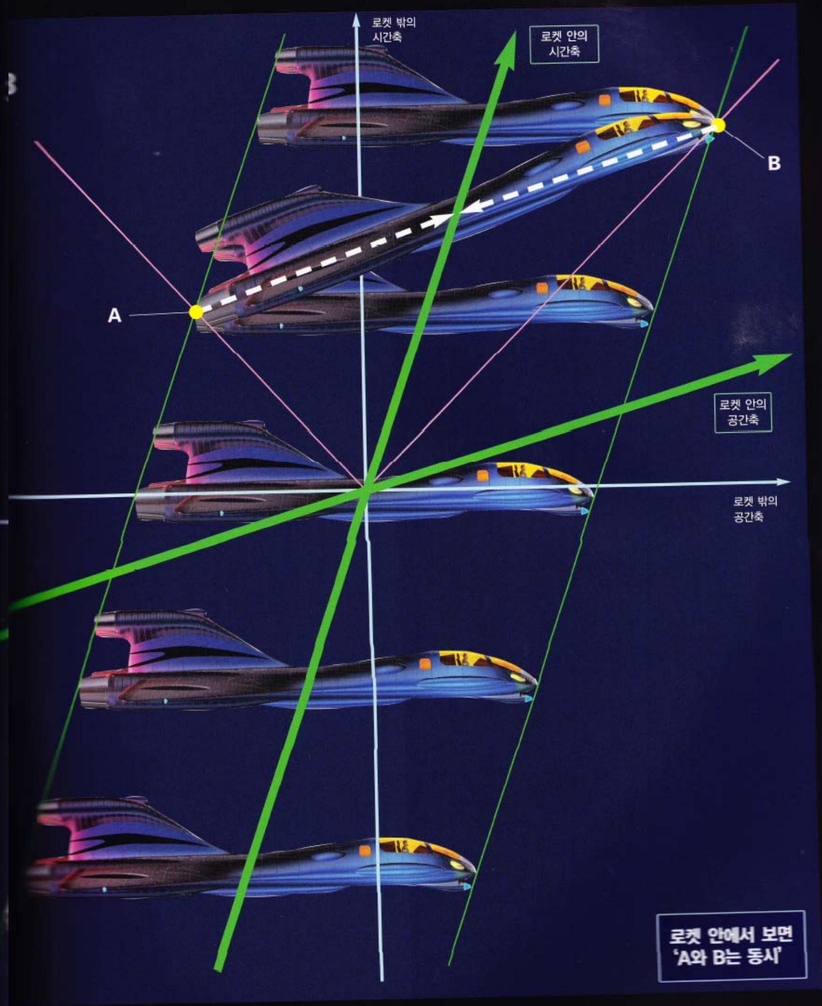
광속에 가까운 속도로 등속 운동을 하는 로켓을 우주 공간에 정지한 우주 정거장에서 바라보고 있다고 하자(1). 그때 로켓은 다이어그램처럼 시간 경과에 따라 조금씩 오른쪽으로 이동해 간다. 어느 시각에 로켓의 중앙에서 빛이 나왔다. 정지한 우주 정거장에서 보면, 빛은 먼저 로켓의 뒤쪽 끝에 닿았다가(2-A) 잠시 뒤 앞쪽 끝에 닿는다(2-B).

그러나 광속이 누구에게나 불변이라면(광속도 불변의 원리), 로켓 안에 있는 관측자에게는 A와 B가 동시에 일어날 것이다(3). '두 관측자의 견해는 모두 옳다.'는 것이 특수 상대성 이론이다. 즉 로켓 안에서의 시간과 공간의 기준(다이어그램에서는 좌표축)은 로켓 바깥과는 다르다고 결론을 내릴 수 있다.

한편 로켓에서 우주 정거장을 바라볼 때도 똑같은 일이 일어난다. 로켓에서 보면, 우주 정거장 쪽이 광속에 가까운 속도로 운동하는 것처럼 보이기 때문이다(상대성 원리). 우주 정거장 중앙에서 빛을 내보내면, 로켓에서 볼 경우 우주 정거장의 한쪽 끝에 빛이 먼저 닿는 것처럼 보인다.







The Lorentz transformation can be written in matrix form as

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{vz}{c^2}\right) \\ x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \gamma(z - vt) \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}}_{\Lambda^u_v} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Position 4-vector $X = (ct, \vec{x})$

An object made up of 4 elements which transforms like X is called a 4-vector

(analogous to the 3-vector of classical mechanics)

❑ Four-Vectors

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x})$$ Covariant vector

$$x^0 = ct$$

$$\vec{x} = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$$

$$x_{\mu} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, -\vec{x})$$ Contravariant vector

$$x_0 = ct$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (-x, -y, -z)$$

The contravariant and covariant vectors are related to each other by a Minkowski metric tensor g_{uv}

$x_u = g_{uv} x^v$ or $x^u = g^{uv} x_v$

Where,

$$g_{uv} = g^{uv} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

❑ Four-Vectors

- To be a four-vector, the four-components must follow the same transformation as the space-time four vector x^{u}

Ex) four-momentum $$P^{u} = \left(\frac{E}{C}, \vec{P} \right)$$

four-current $$J^{u} = \left(c\rho , \vec{J} \right)$$

four vector potential $$A^{u} = \left(c\Phi , \vec{A} \right)$$

❑ Ex : four-momentum

- If four momentum P^u of a Paricle measured in S frame is seen as P'^u in S' frame, then $P'^u = \Lambda^u_v P^V$

- If $P^u = (\frac{E}{C}, 0, 0, P_z)$ is given, then $P'^u = (\frac{E'}{C}, 0, 0, P'_z)$ where

$$\frac{E'}{C} = \gamma \left(\frac{E}{C} + \beta P_Z \right)$$

$$P_z' = \gamma \left(P_Z + \beta \frac{E}{C} \right)$$

- If the particle of mass m is at rest in the frame S,

  Then $P_z = 0$ and $P^u = (mc, \vec{0})$

- In S' frame,

$$P_z' = \gamma(0 + \beta\frac{E}{C}) = \gamma\beta\frac{E}{C} = \gamma\beta\, mc$$

$$\frac{E'}{C} = \gamma(\frac{E}{C} + 0) = \gamma mc$$

$$\Rightarrow E' = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots)$$

$$= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \ldots$$

$$= R + T$$

❑ Scalar product of four-vector => invariant

- If a_u and b^u are four-vectors, then the scalar product $a \cdot b = a_u b^u$ is Lorentz invariant. i.e. $a \cdot b = a' \cdot b'$ ($\because \Lambda^u_v \Lambda^v_\lambda = g^u_\lambda$, where g^u_λ can be represented as 4x4 identity matrix)

- In the four-momenta example, we find

$$P'^2 = P'^u \cdot P'_u = P^2 = P^u \cdot P_u = (\frac{E}{C})^2 - \vec{P}^2 = m^2 c^2$$

$$a' \cdot b' = (La)^T g(Lb) = A^T (L^T g L) A = A^T g A = A \cdot A$$

Example

Relativistic Kinematics

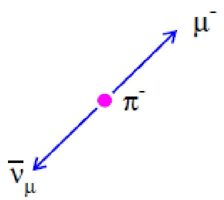
In Special Relativity $(t, \tilde{x})$ and $(E, \tilde{p})$ transform from frame-to-frame, BUT

$$d^2 = t^2\text{-}x^2\text{-}y^2\text{-}z^2$$
$$m^2c^4 = E^2 - \tilde{p}^2c^2$$

are CONSTANT (invariant interval, invariant mass)
Using natural units:

$$\boxed{m^2 = E^2 - \tilde{p}^2}$$

EXAMPLE: $\pi^- \rightarrow \mu^-\overline{\nu}_\mu$ at rest.



Conservation of Energy
$$E_\pi = E_\mu + E_\nu$$
Conservation of Momentum
$$0 = \vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu$$
(assume $m_\nu = 0$)

$$E_\pi = m_\pi, \quad E_\mu^2 = p_\mu^2 + m_\mu^2, \quad E_\nu = |p_\nu|$$

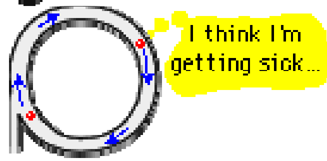
$$\begin{aligned}
E_\pi &= E_\mu + E_\nu \\
\Rightarrow \quad m_\pi &= E_\mu + p_\mu \\
\Rightarrow \quad (m_\pi - E_\mu)^2 &= p_\mu^2 \\
\text{but} \quad E_\mu^2 - m_\mu^2 &= p_\mu^2 \\
\therefore \quad E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} &= \frac{(140\,\mathrm{MeV})^2 + (106\,\mathrm{MeV})^2}{2(140\,\mathrm{MeV})} \\
&= 110\,\mathrm{MeV} \\
|p_\mu| = |p_\nu| &= 30\,\mathrm{MeV}/c
\end{aligned}$$

(see Question 1 on the problem sheet)

Example

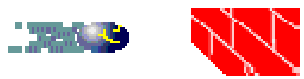
Accelerator design

- Shapes
  - Linacs (SLAC)
  - Synchrotrons (Fermilab)

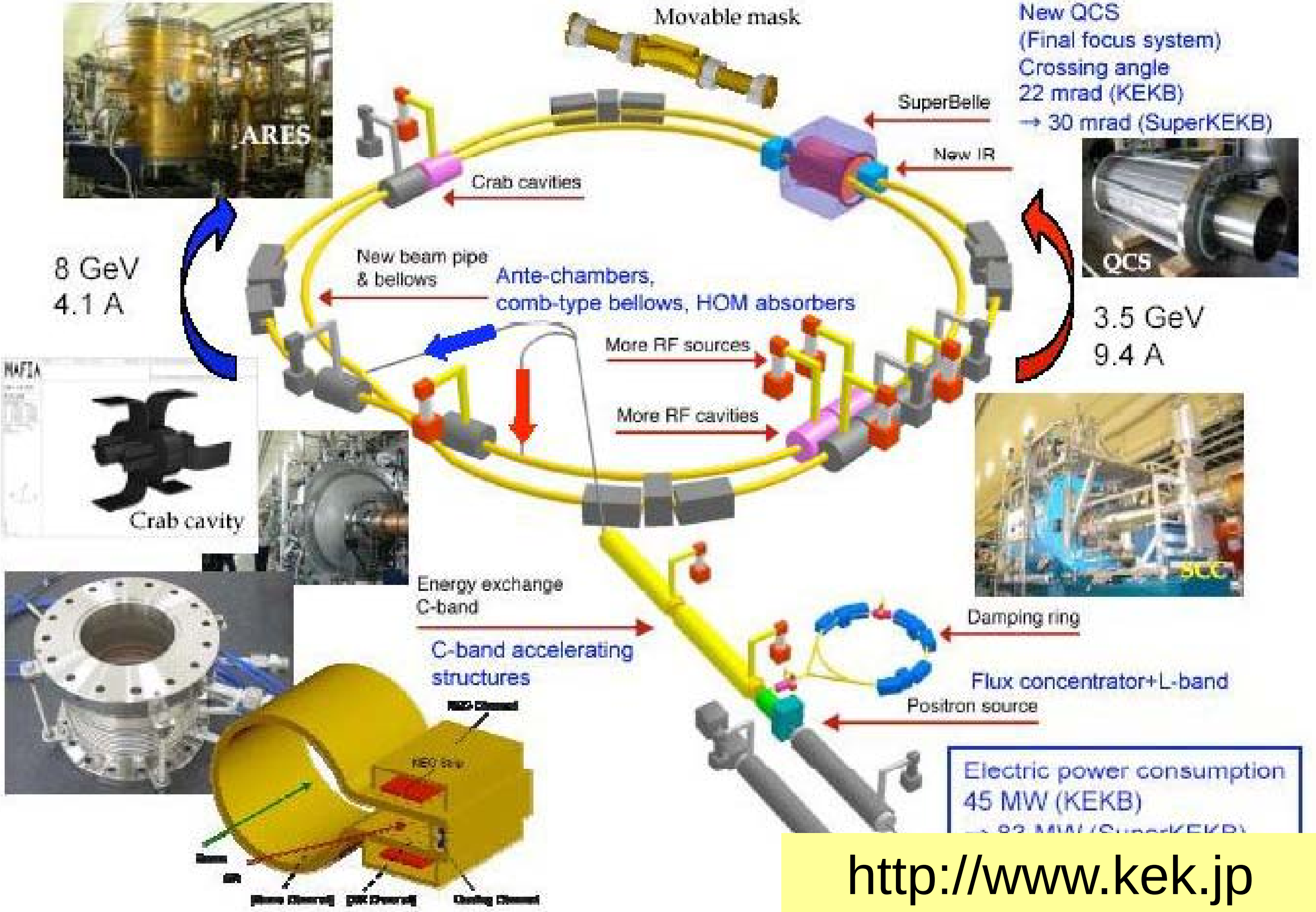


- Collision types
  - Fixed target (E687, FOCUS)
  - Colliding beams (CDF, Belle, BTeV)

  => CM = 1TeV+1TeV => 2TeV

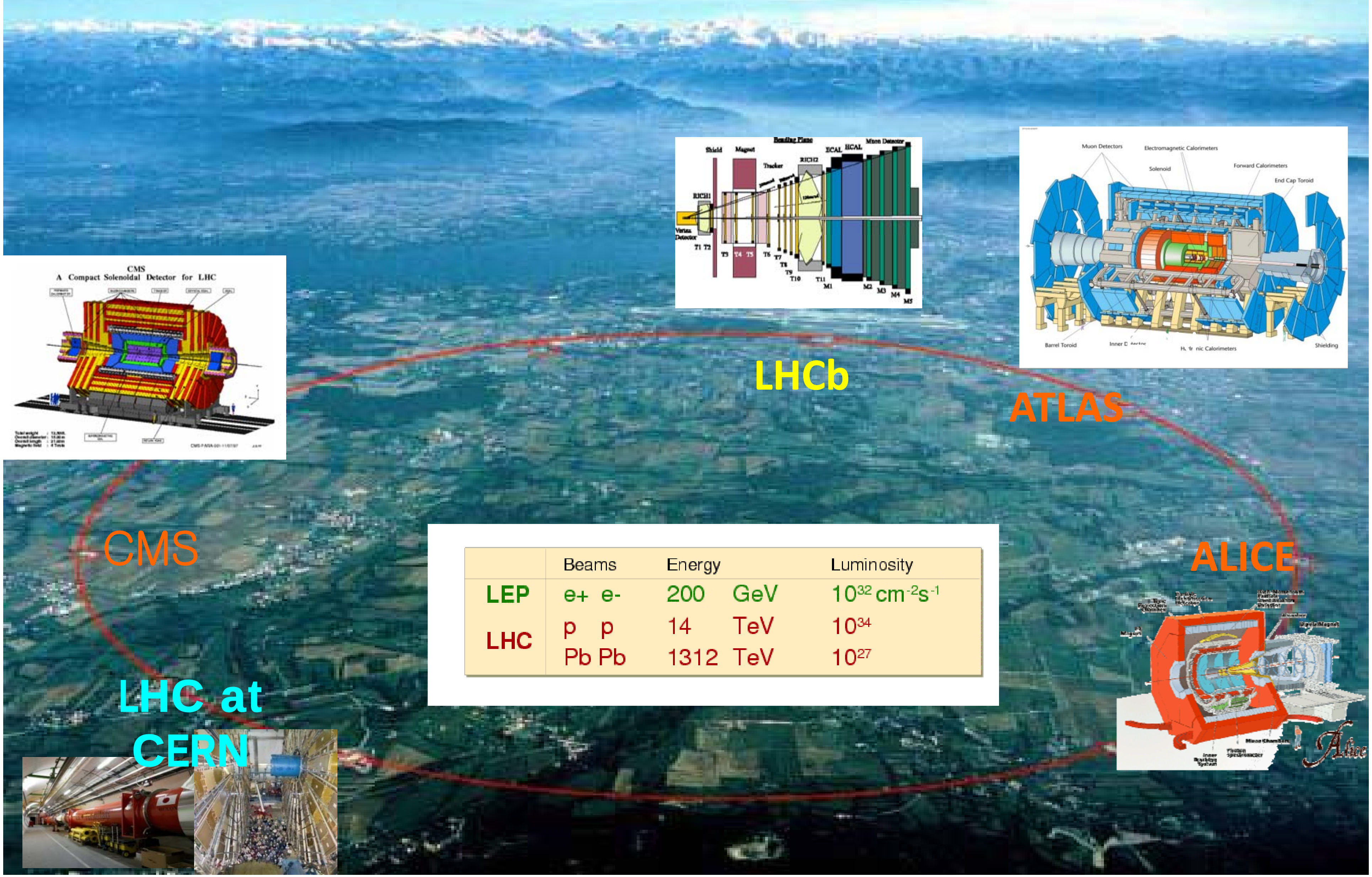


Belle II (2014~)



http://www.kek.jp

양성자-양성자 충돌 가속기 실험
(Large Hadron Collider)



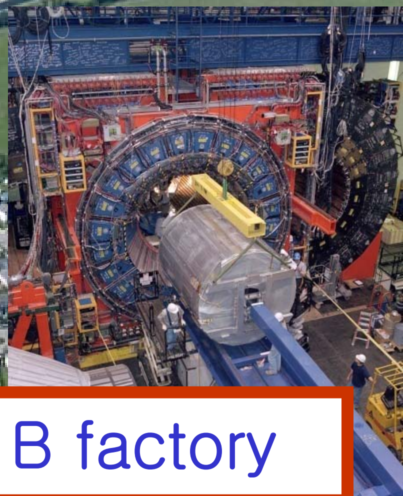
	Beams	Energy		Luminosity
LEP	e+ e-	200	GeV	10^{32} cm^{-2}s^{-1}
LHC	p p	14	TeV	10^{34}
	Pb Pb	1312	TeV	10^{27}

양성자-반양성자 충돌 가속기 실험 (Tevatron)

$\sigma(p\bar{p} \to b\bar{b}) \approx 150\,\mu b$ at 2 TeV (~ 15 kHz!)

$\sigma(e\bar{e} \to b\bar{b}) \approx 7nb$ at Z^0

$\sigma(e\bar{e} \to B\bar{B}) \approx 1nb$ at $\Upsilon(4S)$



Heavier B => Full Service of B factory

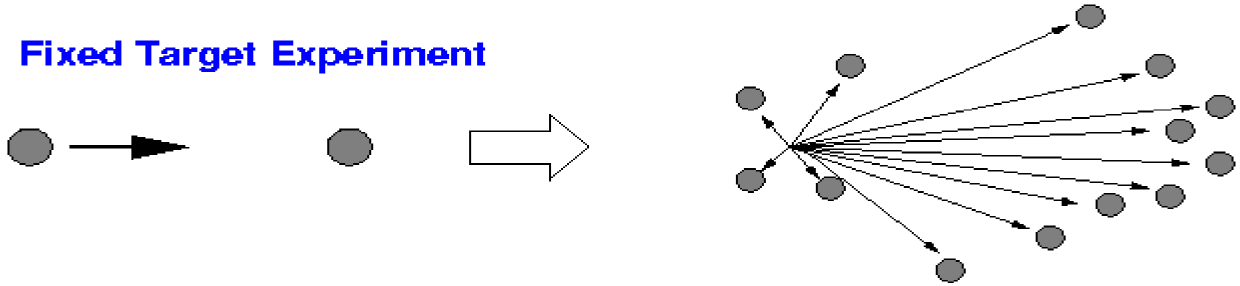
Example

High Energy Experiment

To see subatomic particles, incident beam wavelength should b less than the size of each particle.

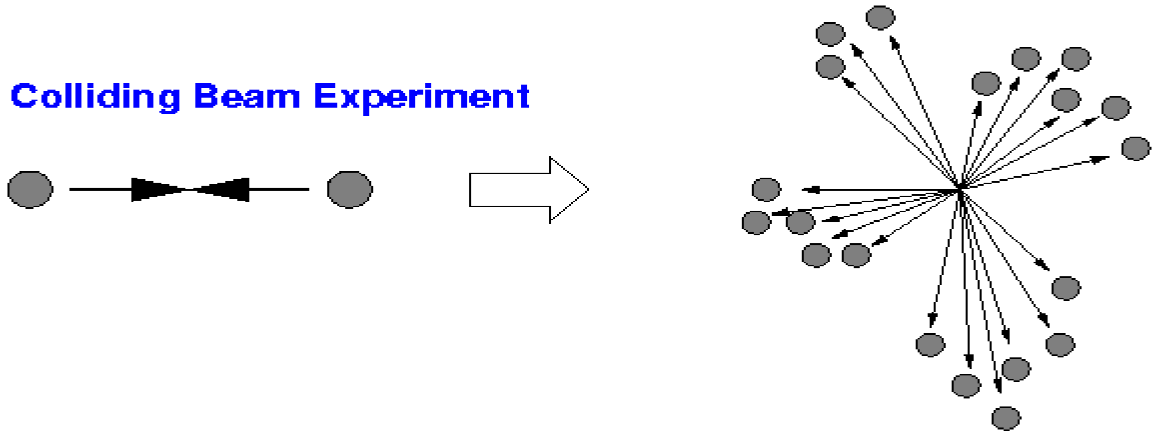
$\lambda = h / p$ **(h:Planck constant p:Incident particle momentum)**

Fixed Target Experiment



Before collision **After collision**

Colliding Beam Experiment



Example

Colliders and $\sqrt{s}$

Consider the collision of two particles:

$$\xrightarrow{\quad} \qquad \xleftarrow{\quad}$$
$$p_1^\mu(E_1,\vec{p}_1) \qquad p_2^\mu(E_2,\vec{p}_2)$$

The invariant quantity $s = (p_1^\mu + p_2^\mu)(p_{1\mu} + p_{2\mu})$

$$\begin{aligned} s &= (p_1^\mu p_{1\mu} + p_2^\mu p_{2\mu} + 2p_1^\mu p_{2\mu}) \\ &= E_1^2 - \tilde{p}_1^2 + E_2^2 - \tilde{p}_2^2 + 2(E_1E_2 - \tilde{p}_1.\tilde{p}_2) \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1E_2 - \tilde{p}_1.\tilde{p}_2) \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1E_2 - |\tilde{p}_1||\tilde{p}_2|\cos\theta) \end{aligned}$$

$\sqrt{s}$ is the energy in the zero momentum frame.
It is the amount of energy available to interaction *e.g.* the maximum energy/mass of a particle produced in matter-antimatter annihilation.

Example

Fixed Target Collision

$p_1^\mu(E,\vec{p})$ → $p_2^\mu(m_2,0)$

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2$$

$$\text{for } E_1 \gg m_1, m_2 \quad s = 2E_1 m_2$$

$$\text{C.O.M. Energy} \quad \sqrt{s} = \sqrt{2E_1 m_2}$$

e.g. 100 GeV proton hitting a proton at rest:

$$\sqrt{s} = \sqrt{2E_p m_p} \approx \sqrt{2.100.1}$$
$$\approx 14\ \mathrm{GeV}$$

Collider Experiment

$p_1^\mu(E,\vec{p})$ → ← $p_2^\mu(E,-\vec{p})$

Now consider two protons colliding head-on.

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1E_2 - |\tilde{p}_1||\tilde{p}_2|\cos\theta)$$

If $E \gg m_1, m_2$ then $|\tilde{p}| = E$ and

$$s = 2(E^2 - E^2\cos\theta)$$
$$s = 4E^2$$
$$\sqrt{s} = 2E$$

e.g. 100 GeV proton colliding with a 100 GeV proton :

$$\sqrt{s} = 2.100 = 200\ \mathrm{GeV}$$

In a fixed target experiment most of the proton's energy is wasted - providing momentum to the C.O.M system rather than being available for the interaction.

(NOTE: UNITS G = Giga $=10^9$, M = Mega $=10^6$)

Example

Fixed target vs Colliding beams

(total energy)^2-(total momentum)^2 = invariant in all frames of reference

Assume that 800GeV(E_{beam}) proton collides in a fixed target(proton).

	Center of mom. frame	Laboraroty frame
Total energy:	E_{CM}	$E_{beam}+m_p$
Total momentum:	0	P_{beam}
Invariant:	E_{CM}^2	$(E_{beam}+m_p)^2-P_{beam}^2$

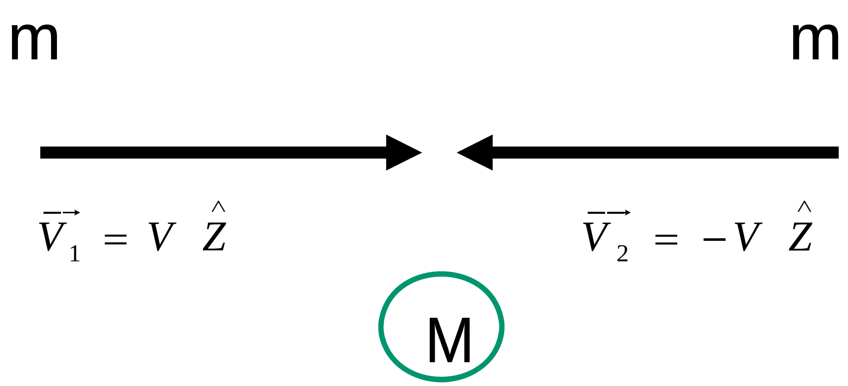
$$E = [\, 2(m_p^2+E_{beam}m_p)\,]^{1/2} = 38.8\text{GeV}$$

We are enough to 19.4GeV+19.4GeV proton beams in collider !!!

Question: What's the advantage of a fixed target experiment?

Example

❑ ex) inelastic collision problem



$$\vec{V}_1 = V\,\hat{Z} \qquad \vec{V}_2 = -V\,\hat{Z}$$

- The four-momenta of two particles are given by

$$P_1^u = \left(\frac{E_1}{c}, \vec{P}_1\right) = (\gamma mc, 0, 0, \gamma mv)$$

$$P_2^u = \left(\frac{E_2}{c}, \vec{P}_2\right) = (\gamma mc, 0, 0, -\gamma mv)$$

- After the collision, total four-momentum is given by

$$P^u = P_1^u + P_2^u = (2\gamma mc, 0, 0, 0)$$

❑ ex) inelastic collision problem, cont'd

- The total mass M is given by

$$M = 2\gamma m = \frac{2m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > 2m$$

In relativistic understanding, the generation of heat energy is realized by the mass increase

❑references

- **Onbitnuri Kim**
- **M.A. Thompson**
- **Newton Magazine**